La comprensión de la divisibilidad en N. Un análisis implicativo

Samuel D. Bodí [*], Julia Valls[**], Salvador Llinares[***]

[*]I.E.S. Professor Manuel Broseta, Banyeres de Mariola, Alicante, España
samueldbodi@telefonica.net
[**]Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante, España
julia.valls@ua.es
http://www.ua.es/dpto/difd/quienes/index.html
[***]Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante, España
sllinares@ua.es
http://www.ua.es/dpto/difd/quienes/index.html

Resumen. Este estudio analiza la comprensión de estudiantes de secundaria sobre la divisibilidad en N y la relación de dicha comprensión con los diferentes modos de representación: decimal y factorial. El cuestionario administrado incluía tareas que demandaban a los estudiantes movilizar sus ideas sobre las diferentes acepciones léxicas así como los significados dados a sus equivalencias (P es divisor de Q $\Leftrightarrow$ Q es múltiplo de P $\Leftrightarrow$ P es un factor de Q $\Leftrightarrow$ Q es divisible por P). El diagrama de similaridad ha mostrado la existencia de seis grupos de ítems indicando que la comprensión de las diferentes relaciones que definen el esquema de divisibilidad en N está relacionada con los modos de representación. Estos seis grupos parecen mostrar las trayectorias de aprendizaje de la divisibilidad indicando la manera en la que una mera comprensión procedimental de los conceptos no es suficiente para superar las demandas cognitivas generadas cuando los números están representados factorialmente con grandes exponentes en los factores.

1 Introducción

Las investigaciones sobre la comprensión de los conceptos de la Teoría Elemental de Números han puesto de manifiesto la existencia de dificultades y la necesidad de una mayor indagación (Dubinsky, 1991; Vergnaud 1994; Zazkis y Campbell, 1996; Campbell, 2000). La mayoría de los trabajos en este campo se han realizado principalmente con estudiantes para maestros y sobre los contenidos matemáticos que se deben enseñar y en menor medida sobre la comprensión alcanzada por los estudiantes de secundaria. De ahí que el análisis de la comprensión de los estudiantes de secundaria sobre la divisibilidad sea en estos momentos un campo de interés educativo.

1.1 La divisibilidad en la Educación Secundaria y los modos de representación de los números

La enseñanza de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales forma parte de los currículos de los alumnos de 10 a 14 años, dependiendo de los planes de estudios. En las primeras décadas del siglo pasado la divisibilidad en la educación primaria se vinculó al estudio de las magnitudes, pero a lo largo del siglo XX el estudio de la divisibilidad se consideró como una propiedad entre números con representación decimal. Este enfoque condujo a enfatizar un marcado carácter procedimental del Teorema Fundamental de la Aritmética (Sierra et al., 1989; Gascón, 2001).

El currículo de educación secundaria consolida los contenidos de divisibilidad introducidos en primaria y plantea las equivalencias entre las distintas acepciones léxicas de divisibilidad: "*Q es múltiplo de P* $\Leftrightarrow$ *P es divisor de Q* $\Leftrightarrow$ *Q es divisible por P* $\Leftrightarrow$ *P es un factor de Q*". Sin embargo, en el currículo de secundaria existe poca mención de las relaciones entre las diferentes representaciones de los números y su integración en el esquema de divisibilidad. A este respecto, un análisis de los libros de texto (Bodí, 2006) ha mostrado que la divisibilidad entre números con representación factorial es escasamente planteada. El modo de representación factorial se ha utilizado principalmente de manera procedimental para calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más números, y algunas veces para la obtención de todos los divisores de un número.

1.2 La comprensión de la divisibilidad en N

Algunas investigaciones sobre la comprensión de la divisibilidad se han centrado en (a) el análisis de la comprensión de las relaciones entre las acepciones léxicas “múltiplo”, “divisor”, “factor”; “ser divisible” y “divisor”, y (b) el papel que desempeñan las representaciones decimal y factorial en la comprensión de la divisibilidad.

Entre las primeras, Zazkis (2000, 2002) analizó las conexiones que los estudiantes para maestro establecían entre factor, divisor, múltiplo, mínimo común múltiplo, máximo común divisor. Zazkis (2000) indica que los estudiantes asociaban el concepto de divisor con la operación de dividir y el concepto de múltiplo con la operación de multiplicar, mostrando una comprensión incompleta del concepto de factor y que los estudiantes realizaban un intercambio constante e incoherente entre el lenguaje formal y no formal. Por ejemplo, “ser divisible” - relación entre dos números- era sustituido por “ser dividido” - un número que puede ser dividido por otro. Desde estos resultados Brown et al. (2002) inciden en la necesidad de establecer la equivalencia lógica de las acepciones " *Q es divisible por P*”; " *Q es un múltiplo de P "; " P es un factor de Q ", y " P es un divisor de Q”*. Los resultados de este estudio ratifican la tendencia de los estudiantes a asociar los conceptos de divisor con la operación de dividir y la importancia de la comprensión de la descomposición única de los números naturales como producto de factores primos. Estas investigaciones ponen de manifiesto que un primer aspecto a considerar en el análisis de la comprensión de la divisibilidad en N deberían ser las relaciones entre las distintas acepciones léxicas de la divisibilidad.

Por otra parte, Zazkis y Gadowsky (2001), Zazkis y Campbell (1996) y Brown et al. (2002) señalan que la manera en la que se representaban los números naturales influía en el nivel de éxito en la resolución de determinadas tareas y en la manera en la que estas eran resueltas. En estas investigaciones los estudiantes, independientemente del modo de representación de los números, recurrían mayoritariamente a la representación decimal para resolver las tareas propuestas. Estos resultados indican que la representación decimal o factorial de los números naturales parece influir en la manera en la que los estudiantes dotan de sentido a los tópicos sobre divisibilidad. Un aspecto que resaltó la investigación de Zazkis y Liljedahl (2004) fue que la comprensión de los números primos está vinculada a los modos de representación y a las relaciones entre los números. Además, Zazkis y Campbell (1996) indican que los alumnos comprenden más fácilmente la divisibilidad que la indivisibilidad. Desde estos resultados se desprende que la construcción de la conexión entre la divisibilidad y la descomposición en factores primos parece contribuir enormemente a comprensión de la divisibilidad.

Por otra parte, las investigaciones de Bodí et al. (2005) y Bodí (2006) han puesto de manifiesto la necesidad operatoria que evidencian los estudiantes de secundaria para discutir los conceptos de divisibilidad, las dificultades que presentan en la coordinación de procesos y la importancia que tiene la descomposición en factores primos en la comprensión de la divisibilidad. Los objetivos planteados en la investigación de Bodí (2006) se dirigían a profundizar en la comprensión de los alumnos de Educación Secundaria (12 a 17 años) del concepto de divisibilidad en el conjunto de los números naturales, concretándose en (a) estudiar las formas de conocer la divisibilidad en el conjunto de los números naturales y los mecanismos que utilizan estos los alumnos, usando el marco teórico constructivista APOS, y (b) caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de divisibilidad en el conjunto de los números naturales. Los resultados de esta investigación vistos desde el modelo APOS de comprensión (Dubinsky, 1991; Asiala et al.1996) subrayan que el desarrollo del esquema de divisibilidad está determinado por la capacidad de los estudiantes para establecer las relaciones bicondicionales entre los tópicos del esquema de divisibilidad, determinando divisores y no divisores, múltiplos y no múltiplos de un número natural a partir de su representación factorial, así como el uso que hacen de los significados de máximo común divisor y mínimo común múltiplo usando diferentes procedimientos y la relación que establecen entre ellos.

La investigación que se presenta aquí tiene como objetivo profundizar en el análisis de la comprensión de los estudiantes de secundaria sobre la divisibilidad en N y la relación de dicha comprensión con los diferentes modos de representación de los números naturales: la representación decimal y la representación factorial.

2 Metodología

2.1 Participantes

371 estudiantes de centros públicos de enseñanza secundaria participaron en esta investigación. 120 estudiantes de 1º de ESO, 137 de 4º de ESO y 114 de 1º de Bachillerato. La muestra elegida para realizar el cuestionario es sesgada, disponible e intencional.

2.2 El Cuestionario

Para diseñar el cuestionario se han analizado (a) los aspectos curriculares de divisibilidad en la enseñanza secundaria, (b) 10 libros de texto de matemáticas de 1º de ESO, y (c) se ha realizado una revisión de las investigaciones previas de divisibilidad (Zazkis y Campbell 1996; Brown et al., 2002). Desde estos análisis se determinó el contenido del cuestionario en: múltiplos y divisores de un número; criterios de divisibilidad por 2, por 3, por 5 y por 9; números primos y compuestos; factorización de un número y máximo común divisor y mínimo común múltiplo. A continuación, se elaboró una colección de problemas que se usaron como referentes para la diseñar un cuestionario piloto. Una vez validado el cuestionario piloto (Bodí et al., 2005) se diseñó el cuestionario definitivo formado por 10 cuestiones y un total de 40 ítems (mirad anexo). El número de ítems de cada cuestión es distinto, varía entre un ítem en las cuestiones dos y seis y los ocho ítems de la primera cuestión, y es debido (a) a la procedencia de las cuestiones, (b) a las dificultades que éstas pudieran plantear en los distintos cursos y (c) al tiempo disponible para la realización de la prueba.

Los ítems se simbolizaron mediante un número inicial, que indicaba la cuestión, una letra que señalaba el apartado, y en algunos casos un segundo número que indicaba la posición del ítem dentro del apartado. Por ejemplo, el ítem

"*Consideremos el* número $M = 3^3 \text{ x } 5^2 \text{ x } 7$. *¿M es divisible por 5? Explica tu respuesta*"

Quedó simbolizado como 4b1 ya que se refiere al subapartado 1 del apartado b, correspondiente a la cuestión 4.

El diseño de este cuestionario se ha vinculado a tres dimensiones, (a) los elementos matemáticos de Divisibilidad (múltiplo, divisor, ser divisible, máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números, (b) los modos de representación (decimal y factorial), y (c) las relaciones entre los elementos matemáticos (bicondicionales, conjunción lógica, condicional y contra recíproca). Estas tres dimensiones han caracterizado los objetivos de los diferentes ítems.

Los ítems de la cuestión 1 y la cuestión 2 pretendían determinar cómo el estudiante establece relaciones entre los elementos divisor, múltiplo, ser divisible, múltiplos y divisores comunes entre números con representación decimal. Los ítems de la cuestión 3 tenían como objetivo identificar cómo los estudiantes movilizan los significados de ser divisible desde los criterios de divisibilidad. Por su parte, los ítems de las cuestiones 6, 7 y 8 pretendían determinar cómo los estudiantes movilizan los significados y relaciones entre los elementos múltiplo y múltiplos comunes o divisor y divisores comunes. Los ítems pretendían también determinar el grado de influencia de los modos de representación en la comprensión de los diferentes tópicos de divisibilidad. Por ejemplo, los ítems de la cuestión 4 que tienen como objetivo analizar si los estudiantes comprenden la idea de "múltiplo" y "ser divisible" independientemente de los modos de representación. Las tareas de la cuestión 5 tienen como objetivo determinar cómo el estudiante establece relaciones entre "divisor" (factor) y "múltiplo" desde la representación factorial y decimal de los números. Finalmente, las cuestiones 9 y 10 permiten analizar cómo los alumnos establecen relaciones entre "divisor", "múltiplo" y "ser divisible" independientemente del modo de representación empleado. Este cuestionario fue usado inicialmente en la investigación de Bodí (2006).

2.3 Aplicación y análisis cuantitativo del cuestionario

El cuestionario se pasó en las clases habituales de los alumnos, con una duración de 50 minutos, sin que los estudiantes hubieran recibido información previa sobre el contenido de las tareas. Para contestar al cuestionario se permitió el uso de la calculadora científica para facilitar las respuestas y los cálculos de los estudiantes, observar la habilidad de los estudiantes para renunciar al cálculo de representaciones decimales y estimular su confianza.

Las repuestas al cuestionario se codificaron de forma dicotómica, 0 ó 1, según la respuesta fuese correcta o incorrecta, situándose de esta manera el rango de puntuación entre 0 y 40. Se calculó el índice de dificultad, la homogeneidad, el coeficiente de fiabilidad (Alpha de Cronbach), el análisis factorial y la generalizabilidad de la prueba, ajustándonos a las características correlaciónales básicas, utilizando el programa SPSS 11.5.

Los resultados del coeficiente Alpha de Cronbach mostraron que la consistencia interna del cuestionario de la investigación es alta, siendo de 0,8779 en la muestra global. De igual modo la generalizabilidad es alta, puesto que en la muestra global el coeficiente de generalizabilidad respecto a otros ítems es de 0,8767 y el coeficiente de generalizabilidad respecto a otros alumnos es de 0,9879. Además se realizó un análisis de factores principales usando el software SPSS (Bodí, 2006).

Posteriormente se ha llevado a cabo un análisis implicativo de las respuestas de los estudiantes mediante el software CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) (Bodin et al., 2000). El diagrama de similaridad permite agrupar grupos de ítems en función de su homogeneidad lo que puede permitir la interpretación conceptual con que manejan los alumnos cada grupo de tareas. La gráfica implicativa (Gras et al., 1997) pone de manifiesto las implicaciones entre las variables, indicando que el éxito en una determinada tarea implica el éxito en otra relacionada. Los resultados de la muestra total de este análisis es lo que se presenta en esta comunicación.

3 Resultados

3.1 Análisis de similaridades

En la Figura 1 aparece el gráfico de relaciones de similaridad de la muestra total

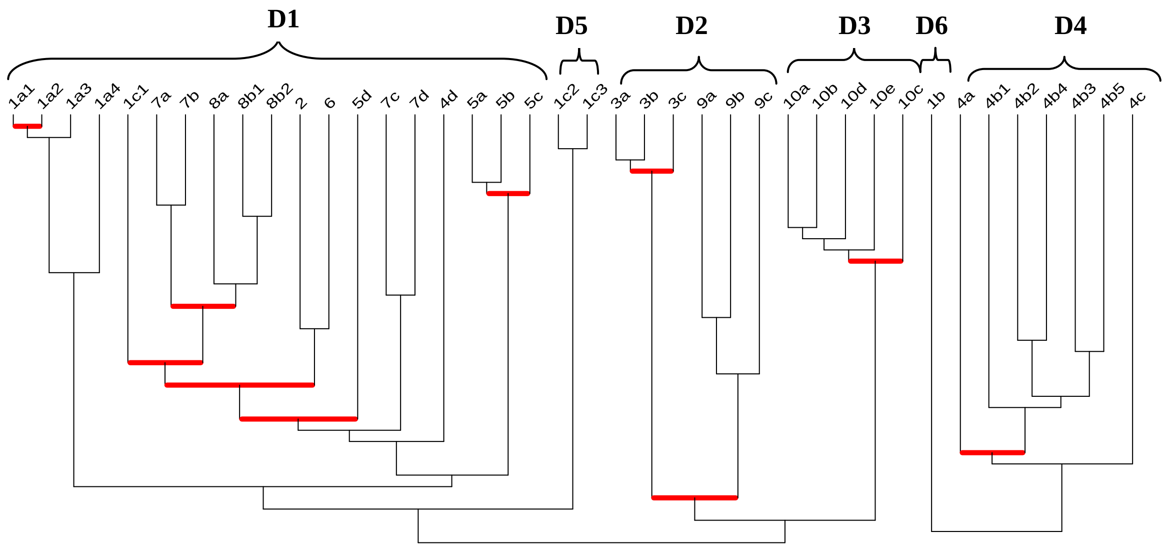

Fig.1 Diagrama de similaridad de las respuestas de los alumnos en las tareas del cuestionario

El diagrama muestra las conexiones de similaridad entre las variables del estudio referidas al éxito de los estudiantes en las tareas de divisibilidad en el cuestionario y que comprenden los significados de múltiplo, divisor y las relaciones ser divisible y ser múltiplo en representación decimal (en las cuestiones 1, 2 y 3), la idea de múltiplo y divisor en representación factorial y propiedades (en las cuestiones 4, 5, 9 y 10), así como las ideas de múltiplos y divisores comunes (en las cuestiones 6, 7 y 8). Los cuarenta ítems del cuestionario han quedado agrupados (Figura 1) en seis grupos, denominados D1, D2, D3, D4, D5 y D6, donde los cinco primeros se presentan al 90% de conexión estadísticamente significativa.

Los grupos de similaridad quedan constituidos por la homogeneidad entre las tareas e identificados del siguiente modo: el grupo de similaridad D1 (ítems 1a1, 1a2, 1a3, 1a4; 1c1; 2; 4d; 5a, 5b, 5c; 6; 7a, 7b, 7c, 7d y 8a, 8b1, 8b2) lo integran las variables que indican la utilización de las expresiones decimales en la aplicación y uso de los significados de múltiplo y divisor, la transformación de la representación decimal de un número en productos de factores, los procedimientos de cálculo de múltiplos y divisores comunes de un número natural y su aplicación en contexto real.

El grupo D2 (ítems 3a, 3b, 3c y 9a, 9b, 9c) contiene las variables que corresponden al uso de las acepciones "ser divisible" (criterios de divisibilidad) entre números con representación decimal, "ser divisor" (P es divisor de Q) y "ser múltiplo" (Q es múltiplo de P) entre números representados factorialmente.

El grupo D3 lo constituyen los ítems de la cuestión 10 cuya resolución se ve favorecida por el uso de la propiedad de la divisibilidad "Si P/ Q y P /R $\Rightarrow$ P / (Q+R)".

El grupo D4, formado por los ítems de la cuestión 4 excepto el ítem 4d, incluye las variables que hacen referencia (a) al uso del significado de "M es divisible por" números primos o compuestos, formados por factores que están o no en la descomposición en factores primos del número M y (b) al uso de la idea "ser múltiplo de" otro número, ambos descompuestos en factores primos. Por otra parte, hay que señalar que el análisis implicativo ha dejado fuera del grupo D4 al ítem 4d, perteneciente a la cuestión 4. Este ítem forma parte del grupo D1 e incluye la variable "ser múltiplo de" otro número, estando ambos números también descompuestos en factores primos, si bien el primero de gran tamaño lo que, en consecuencia, impidió el uso de la calculadora o la interpretación del resultado.

El grupo D5 (ítems 1c2 y 1c3) incluye la variable "ser divisible" entre números con representación decimal. En estos dos ítems se pregunta si el número 24 es divisible por números de una, dos, tres y cuatro cifras, menores que 2500, o si estos números son divisibles por 24, respectivamente.

El grupo D6 está formado por un único ítem, el 1b de la cuestión 1. Este ítem hace referencia al uso de la idea "ser múltiplo" entre números representados por su expresión decimal.

3.2 Los modos de representación y la idea de unicidad de la descomposición factorial

El uso que hacen los estudiantes de los modos de representación (decimal o factorial) de los números naturales y la asunción de la unicidad de la descomposición factorial de un número natural resulta fundamental en la discriminación de los grupos de similaridad obtenidos. La significación de esta evidencia se manifiesta en la configuración de los grupos D4 y D3 en los que se pide la determinación de la idea "ser divisible" entre números representados factorialmente (ítems 4a y 4b), de la idea de ser múltiplo cuando ambos números aparecen expresados mediante la representación factorial (ítem 4c) y de la propiedad "Si P/ Q y P /R $\Rightarrow$ P / (Q+R)" (cuestión 10), donde uno de los sumandos aparece expresado mediante la descomposición factorial. En la resolución de estos ítems, los alumnos manifiestan mayoritariamente la tendencia de obtener la representación decimal para realizar la división y comprobar el resultado. Pocos alumnos usan las equivalencias entre factor y divisor, entre factor y múltiplo o las propiedades de la divisibilidad.

La importancia del uso de los modos de representación para la compresión de la divisibilidad vuelve a manifestarse en el grupo de similaridad D2 dado que en la cuestión 9

"Sabiendo que: 1001 = 7 x 11 x 13 y 91 = 7 x 13, ¿son *correctas las siguientes afirmaciones? Justifica tu respuesta:*

> *9a) 91 no es divisor de 1001.*
> *9b) 77 es divisor de 1001.*
> *9c) 2002 no es múltiplo de 13"*

los alumnos requieren de la representación decimal de los números para estudiar las ideas de "ser múltiplo" y "ser divisor" cuando al menos uno de los números aparece expresado mediante la descomposición factorial.

3.3 Las relaciones entre los conceptos que integran el esquema de divisibilidad

En cada uno de los grupos de similaridad formados se identificaron relaciones entre los conceptos de divisibilidad que muestran el "grado de *conectitud*" del esquema de divisibilidad y por tanto un nivel de comprensión del esquema. En el grupo D4 se efectúa la primera conexión entre los ítems 4b2 y 4b4.

"*Consideremos el número* $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$.
4b2) ¿M es divisible por 2?,
4b4) ¿Por 11? Explica tu respuesta"

Estos ítems implican la divisibilidad del número M = $3^3 \times 5^2 \times 7$ por dos números primos (2 y 11) que no aparecen en la misma. En el siguiente nivel se conectan los ítems 4b3 y 4b5,

"*Consideremos el número* $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$.
4b3) ¿M es divisible por 9?,
4b5) ¿Por 15? Explica tu respuesta"

que requieren la divisibilidad del número M por dos números compuestos (9 y 15) que sí forman parte de la descomposición factorial de M.

En las respuestas del cuestionario, los alumnos muestran mayoritariamente la necesidad de tener los números expresados mediante su representación decimal para discutir la divisibilidad y esta primera agrupación parece evidenciar que la idea de "no ser divisible" presenta más dificultades a los estudiantes que la de "ser divisible", dado que 2 y 11 son dos números que no aparecen en la descomposición factorial de M. Este hecho subraya la importancia de una comprensión conceptual de la unicidad de la descomposición en factores primos. Por otra parte, 9 y 15 son factores compuestos que aparecen en la descomposición factorial, aunque su observación no es evidente a primera vista y genera nuevas dificultades a los alumnos.

En un nivel posterior se conectan los dos subgrupos anteriores, y luego con el ítem 4b1. El ítem 4b1 implica la divisibilidad de M por un número primo de la descomposición factorial con exponente 1 (5). Por tanto, la vinculación entre "ser divisible" y la representación factorial depende de si el posible divisor P es un factor primo (5), un factor compuesto de la representación factorial (9, 15), o bien es un número primo que no está en la descomposición factorial (2, 11). Todas estas conexiones tienen un coeficiente de similaridad superior a 0,997. La conexión siguiente se establece con el ítem 4a (divisibilidad por 7). La última conexión se realiza con el ítem 4c, que se refiere a la idea de "ser múltiplo" cuando los dos números están expresados mediante su representación factorial. En este caso el índice de similaridad es de 0,97.

El concepto de divisibilidad y la relación que muestra con la indivisibilidad requieren una comprensión conceptual de la unicidad de la descomposición en factores primos (Zazkis y Campbell, 1996) por lo que la comprensión de la unicidad de la descomposición factorial en factores primos conduce más fácilmente a formas generalizadas de la divisibilidad.

El hecho de que el grupo D4 (ítems 4a, 4b1, 4b2, 4b3, 4b4, 4b5, 4c) no tenga conexión en el gráfico de similaridad con el resto de grupos parece destacar la importancia de la comprensión de la "indivisibilidad" entre números con representación factorial. En los ítems 4b2 y 4b4 de la cuestión 4 se pregunta por la divisibilidad de M por números que no aparecen en su descomposición factorial. En el ítem 4c

"*Consideremos el número* $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$
4c) ¿$3^4 \times 5 \times 7^3$ *es un múltiplo de M?*"

M contiene los mismos factores de su posible múltiplo con distintos exponentes.

En el grupo D3 se integran los ítems de la cuestión 10

"*Indica razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta. El número* $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ *es:*
10 a) Divisible por 5.
10 b) Divisible por 2 y por 4.
10 c) Divisible por 3.
10 d) Divisible por 6.
10 e) Divisible por 15".

El ítem 10c (divisibilidad por 3) es el último que se integra en este grupo D3. Este ítem se caracteriza porque es el único de la cuestión 10 que tiene respuesta afirmativa (3 es divisor de K). En las tareas de este grupo los estudiantes necesitan la representación decimal del número para discutir la divisibilidad. Por otra parte, los ítems del grupo D3 como los del grupo D4 aparecen clasificados como ítems fáciles o muy fáciles según el índice de dificultad, dado que la representación factorial de los números con exponentes pequeños permite la operatividad con la calculadora y discernir la divisibilidad mediante la obtención de la representación decimal de los números y la división

Las conexiones en el grupo D2 se realizan entre dos subgrupos principales. Por una parte, un primer grupo que conexiona las variables de la cuestión 3 que hacen referencia a la idea de "ser divisible" desde los criterios de divisibilidad por 2 y por 3 (ítems 3a y 3b) y la coordinación de los mismos (ítem 3c). Este primer subgrupo se forma en los niveles 4 y 5 con índices de similaridad 1.

El otro subgrupo del grupo D2 está formado por los ítems de la cuestión 9, en los que se pregunta por la divisibilidad de un número expresado decimal y factorialmente (*1001 = 7 x 11 x 13)* por divisores compuestos y de un múltiplo de éste (2002) con representación decimal, por 13. De nuevo observamos la influencia de los modos de representación de los números naturales en la comprensión de la divisibilidad. Los coeficientes de similaridad en este subgrupo son muy altos y cercanos a 1.

La conexión de los dos subgrupos del grupo D2 se realiza al nivel del 90 % y pensamos que se produce porque en ambos subgrupos se solicita la divisibilidad por 2, por 3 y por 6, siendo ambos números (2b45 y K) divisibles por 3.

En el grupo D1 el primer vínculo se establece entre los ítems 1a1 y 1a2 que hacen referencia a las ideas de múltiplo y divisor entre números pequeños. Del análisis de las respuestas que ofrecen los estudiantes se pone de manifiesto que los estudiantes asocian los significados de divisor y múltiplo con las operaciones de dividir y multiplicar, pensando sólo en el procedimiento. Posteriormente, conectan con los ítems 1a3 y 1a4 que tienen preguntas similares.

Un segundo subgrupo que aparece fuertemente cohesionado en el grupo de similaridad D1 es el que constituyen los ítems 5a, 5b y 5c

"Descompón el número 100
5a) en dos factores,
5b) en tres factores,
5c) en el máximo número de factores. Justifica tu respuesta"

Estos ítems requieren la traslación entre las representaciones decimal y factorial de un número natural para obtener las distintas descomposiciones del número en dos, tres o más factores. Nuevamente se evidencia la influencia de la representación del número en la determinación de la comprensión de la divisibilidad.

El ítem 5d (descomposición en factores primos de 100) aparece en otro subgrupo junto a los ítems que estudian los significados y aplicaciones contextuales de las ideas de "múltiplos y divisores comunes" (C6, C7, C8 y C2), la idea de "ser múltiplo" cuando los números aparecen en su representación decimal (ítem 1c1) y de la idea de "ser múltiplo" cuando ambos números aparecen expresados mediante su representación factorial (ítem 4d), a un nivel de significación del 98%.

Los tres subgrupos de D1 se conectan entre sí con un índice de similaridad del 92%. En todos los ítems del grupo de similaridad D1 se presentan los números naturales expresados mediante la representación decimal, con excepción del 4d.

Dentro del grupo D1 cabe destacar que las conexiones entre los ítems 7a y 7b (significado de mínimo común múltiplo y máximo común divisor de dos números), entre los ítems 8a, 8b1 y 8b2 (uso del máximo común divisor de dos o más números en situaciones reales), la de los ítems 2 y 6 (múltiplos comunes) y el vínculo entre los ítems 7c y 7d (obtención procedimental del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor de dos números de 2 cifras) se realizan con un índice de similaridad superior a 0,99.

En resumen, treinta siete de los cuarenta ítems que conforman el cuestionario, agrupados en cuatro grupos que hemos denominado D1, D2, D3 y D4, presentan entre ellos una conexión estadísticamente significativa del 90%. Los ítems 1c2, 1c3 forman el grupo D5, y presenta con el grupo D1 una conexión estadísticamente significativa del 82%. El ítem 1b constituye por si sólo el grupo D6 y presenta con el grupo D4 una conexión estadísticamente significativa del 22%.

Los grupos y subgrupos que aparecen en el gráfico de similaridad, ponen de manifiesto la influencia de los modos de representación de los números naturales en la comprensión de la divisibilidad, formándose los grupos de similaridad en función del modo de representación (factorial o decimal) de los números naturales, y efectuándose las conexiones de similaridad dentro de cada uno de ellos en función de los modos de representación y de los elementos de divisibilidad que incluyen las diferentes variables de cada una de las cuestiones.

3.4 Análisis implicativo

El gráfico implicativo de la Figura 2 muestra las relaciones de implicación entre las variables del cuestionario, en el sentido que el éxito en la respuesta de un ítem implica el éxito en otra tarea relacionada. El gráfico implicativo de la Figura 2 aparece en el umbral de significación del 99% efectuado sobre el análisis de las respuestas de los estudiantes en el cuestionario.

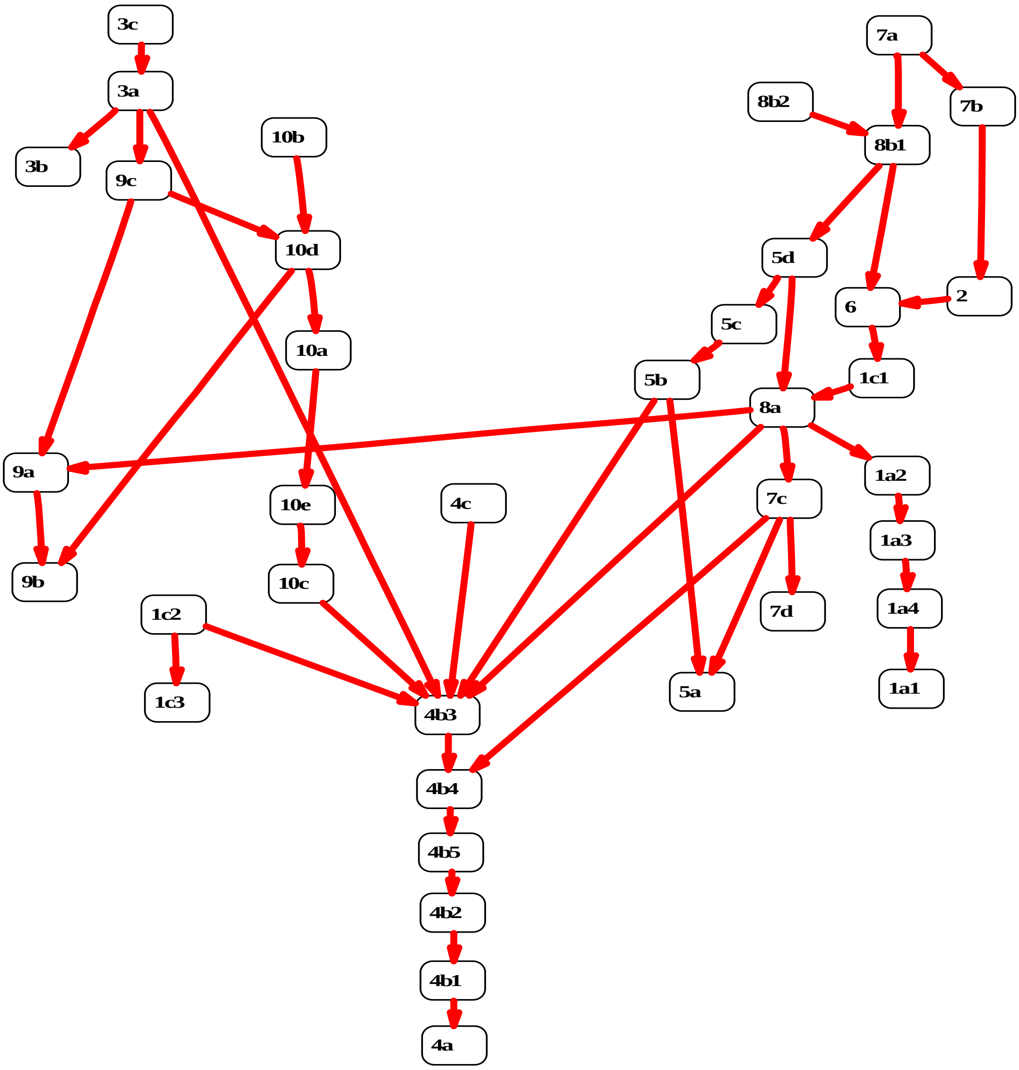

Fig. 2 - Diagrama implicativo de las respuestas de los alumnos en las tareas del cuestionario

Los grupos principales que se forman son 3, y aparecen en consonancia con las observaciones realizadas en el diagrama de similaridad. Las relaciones en los diagramas implicativo y de similaridad ponen de manifiesto la necesidad de la representación decimal en el uso de las acepciones de divisibilidad y sus propiedades. El sentido de las implicaciones evidencian que el éxito de los estudiantes en la coordinación de criterios de divisibilidad (ítem 3c) y el conocimiento de los significados de mínimo común múltiplo y de máximo común divisor de dos números (ítem 7a y 7b), así como la aplicación del máximo común divisor de dos o más números en situaciones contextuales (ítems 8b1 y 8b2) conlleva responder acertadamente a la mayoría de los ítems que involucran a los significados de la divisibilidad y sus propiedades. Los ítems 3c, 7a y 8b2 que inician las ramas de las implicaciones del diagrama implicativo han sido clasificados como Muy Difíciles en función del éxito de las respuestas de los alumnos en los cuestionarios.

La formación de los grupos del gráfico implicativo vuelve a revelar la influencia de los modos de representación en la comprensión de los tópicos de divisibilidad. El modo de representación factorial de los números naturales presenta dificultades a buena parte de los estudiantes que necesitan la obtención de la representación decimal de los números naturales para poder discutir la divisibilidad, principalmente realizando la división y comprobando el resultado, o utilizando los criterios elementales de divisibilidad.

4 Discusión

El estudio que hemos realizado tiene como objetivo profundizar en la comprensión de los alumnos de educación secundaria de la divisibilidad y la influencia que en esta comprensión ejercen los modos de representación (decimal y factorial) de los números naturales. El análisis implicativo llevado a cabo pone de manifiesto que en la comprensión de la divisibilidad resulta fundamental el uso que los estudiantes hacen de los modos de representación (decimal o factorial) de los números naturales y la asunción de la unicidad de la descomposición de un número natural en producto de factores. Nuestros resultados muestran la necesidad de los estudiantes de tener la representación decimal de los números naturales para discutir la divisibilidad. Por otra parte, el diagrama de similaridad muestra que las agrupaciones formadas, grupos D1, D3, D4 y uno de los subgrupos de D2, revelan la influencia de los modos de representación para discutir la divisibilidad. Este análisis implicativo ha permitido discriminar los grupos de similaridad e implicación en función del modo de representación decimal (D1, D5 y D6) o factorial (D4, D3 y uno de los subgrupos de D2) de los números naturales con que se presentaban las tareas.

La influencia de los modos de representación y su uso en la práctica escolar aparece reflejada en la formación del grupo D1 del gráfico de similaridad. Su constitución puede justificarse respecto a una determinada práctica escolar que enfatiza las tareas en las que se usan y simbolizan los números naturales mediante la representación decimal para discutir y explicar las relaciones y significados de divisibilidad.

En consonancia con las investigaciones previas sobre la comprensión de la divisibilidad (Zazkis y Campbell, 1996; Zazkis, 2000; Zazkis y Gadowski, 2001; Brown et al., 2002; Zazkis y Liljedahl, 2004; Bodí et al., 2005; Bodí, 2006), el análisis implicativo realizado destaca el papel esencial de la descomposición única en factores primos de los números naturales en la compresión de la divisibilidad, subrayando la significación de una comprensión conceptual de la unicidad de la descomposición de los números naturales en producto único de factores primos.

El uso que hacen los estudiantes de educación secundaria de la representación factorial evidencia las dificultades que tienen con esta representación. Mayoritariamente necesitan obtener la representación decimal del número y dividir para discutir la divisibilidad como se constata en las respuestas que ofrecen a los ítems de las cuestiones 4, 9 y 10. Los ítems de estas cuestiones constituyen en sí mismos dos grupos y un subgrupo del diagrama de similaridad y un grupo o subgrupo del mismo.

Estas agrupaciones se manifiestan también en el diagrama implicativo. En este diagrama destacamos la influencia que ejercen (a) la coordinación de los criterios de divisibilidad (ítem 3c), (b) la comprensión de la relación de “indivisibilidad” (ítem 3a) y (c) la comprensión de los significados de mínimo común múltiplo y de máximo común divisor de dos números y la aplicación del máximo común divisor de dos o más números en situaciones reales (ítems 7a, 7b y cuestión 8) en el éxito de las respuestas de los alumnos en las tareas de divisibilidad.

Los resultados obtenidos en el gráfico implicativo corroboran otros resultados destacados en investigaciones anteriores tales como la evidencia de que una buena comprensión de la divisibilidad involucra la coordinación de ejemplos específicos de divisibilidad y que la indivisibilidad presenta a los estudiantes mas problemas que la divisibilidad (Zazkis y Campbell, 1996), o que la comprensión del concepto de múltiplo y de sus propiedades debe permitir a los alumnos realizar inferencias sobre la estructura de la descomposición factorial y del mínimo común múltiplo (Brown et al., 2002).

En la investigación que hemos llevado a cabo se muestra la necesidad de incidir en prácticas escolares en la educación secundaria que otorguen un papel significativo al Teorema Fundamental de la Aritmética en la comprensión de la divisibilidad. Por ello, es necesario pasar de las prácticas habituales de carácter procedimental, uso de la descomposición factorial de los números naturales como herramienta de cálculo de determinados elementos de la divisibilidad, a prácticas que permitan el perfeccionamiento cognitivo de los estudiantes y que favorezcan la comprensión de la divisibilidad a través de la comprensión de la unicidad de la descomposición factorial de los números naturales en producto único de factores primos.

Referencias

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. et Thomas, K. (1996), A framework for research and development in undergraduate mathematics education, Research in Collegiate Mathematics Education, 2, pp 1-32.

Bodí, S.D. (2006), Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los Números Naturales, Tesis doctoral, Universidad de Alicante.

Bodí, S.D., Valls, J. y Llinares, S. (2005), El análisis del desarrollo del esquema de divisibilidad en N. La construcción de un instrumento, Números, 60, pp 3-24.

Bodin, A., Couturier, R. et Gras, R. (2000), CHIC: Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive. CHIC 1.2. Rennes: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Brown, A., Thomas, K. et Tolias, G. (2002), Conceptions of divisibility: success and understanding, In S. Campbell et R. Zazkis (Eds.), Learning and teaching number theory, pp 41-82, Westport: Ablex Publishing.

Campbell, S. (2000), Bringing insights from research into the classroom: The case of introductory number theory, Proceedings of the 3rd Annual conference of the Association of Mathematics Teacher Educator, Chicago, ERIC document ED445909.

Dubinsky, E. (1991), Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, In Tall, D (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, pp 95-123, Boston: Kluwer Academic Publishers.

Gascón, J. (2001), Reconstrucción de la divisibilidad en la Enseñanza Secundaria, Quadrante, 10, 2, pp 33-65.

Gras, R., Peter, P., Briand, H. et Philippé, J. (1997), Implicative Statistical Analysis, In Hayashi, N. Ohsumi, N. Yajima, Y. Tanaka, H. Bock et Y. Baba (Eds.), Proceedings of the 5th Conference of the International Federation of Classification Societies, Vol. 2, pp 412-419, New York: Springer-Verlag.

Sierra, M., González, M.T., Sánchez, A. y González, M. (1989), Divisibilidad, Madrid: Síntesis.

Vergnaud, G. (1994), Multiplicative conceptual field: what and why?, In Guerson, H. y Confrey J. (Eds.), The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics, pp 41-59, Albany: SUNY.

Zazkis, R. (2000), Factors, divisors and multiples: Exploring the web of students' connections, Research in Collegiate Mathematics Education, 4, pp 210-238.

Zazkis, R. (2002), Language of number theory: metaphor and rigor, In S. Campbell y R. Zazkis (Eds.), Learning and teaching number theory, pp 83-95, Westport: Ablex Publishing.

Zazkis, R. et Campbell, S. (1996), Divisibility and Multiplicative structure of natural numbers: preservice teacher's understanding, Journal for Research in Mathematics Education, *27* (5), pp 540-563.

Zazkis, R. et Gadowsky, K. (2001), Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers, In A. Cuoco (Ed.), NCTM 2001 Yearbook: The roles of representation in school mathematics, pp 41-52, Reston: NCTM.

Zazkis, R. et Liljedahl, P. (2004), Understanding primes: the role of representation, Journal for Research in Mathematics Education, 35 (3), pp 164-186.

Résumé

Cette étude analyse la compréhension des étudiants de secondaire à propos de la divisibilité en N et la relation de cette compréhension avec les différents modes de représentation: la représentation décimale et factorielle. Le questionnaire distribué incluait des tâches qui exigeaient aux étudiants de mobiliser leurs idées à propos des différentes acceptions lexicales de même que les signifiés données à ses équivalences (P c'est un diviseur de Q $\Leftrightarrow$ Q c'est un multiple de P $\Leftrightarrow$ P c'est un facteur de Q $\Leftrightarrow$ Q est divisible par P). L'arbre des similarités a montré l'existence de six groupes d'items qui indiquent que la compréhension des différentes relations qui définissent le schéma de divisibilité N est en rapport avec le mode de représentation. Ces six groupes semblent montrer les trajectoires d'apprentissage de la divisibilité en indiquant la manière dans laquelle une simple compréhension de la procédure des concepts de divisibilité ce n'est pas suffisante pour surpasser les

besoins cognitives produites quand les nombres sont représentés factoriellement avec des grands exposants dans les facteurs.

Summary

This study analyzes secondary students' understanding of divisibility and the role played by different modes of representation: decimal and factorial representation. The test included items that demanded to students use the meanings of factor, divisor, multiple and "to be divisible", and their equivalences (P divisor of Q $\Leftrightarrow$ Q is multiple of $\Leftrightarrow$ P is a factor of Q $\Leftrightarrow$ Q is divisible by P). The similarity diagram displayed six groups of items indicating that students' understanding of divisibility squeme is relationed with the modes of representation of natural numbers. The six groups indicate students' learning trajectories of divisibility that can be interpreted indicating that a procedimental understanding of divisibility is not enough to manage the cognitive demand of items with numbers represented with factors and high exponent.

Anexo

Cuestionario
Cuestión nº 1 a) Completa con las palabras: ***divisor ó múltiplo***. Razona tu respuesta 8 es _________ de 2 ; 4 es _________ de 16 ; 21 es _________ de 7 ; 25 es _________ de 625 b) Dados los números: 0, 2, 4, 6, 8, 10 y 16, determina si 64 es múltiplo de alguno de ellos. Justifica. c) Considere la siguiente colección de números: 1, 3, 6, 8, 15, 24, 39, 42, 48, 69, 2400, 2412. I. Los números del listado que son múltiplos de 24 son: ________________________ II. Los números del listado que son divisibles por 24 son:________________________ III. Los números del listado por los que 24 es divisible son: ________________________ Justifica.
Cuestión nº 2 Los múltiplos de un número comprendidos entre 460 y 560 son: 464, 493, 522 y 551. ¿De qué número se trata? Explica tu respuesta
Cuestión nº 3 Indica, justificando tu respuesta, el valor de **b** para que el número **2b45** sea: I. divisible por 2; II. divisible por 3; III. divisible por 6.
Cuestión nº 4 Consideremos el número: $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$ a) ¿M es divisible por 7? Explica tu respuesta b) ¿M es divisible por 5? ¿Por 2? ¿Por 9? ¿Por 11? ¿Por 15? Explica tu respuesta. c) ¿$3^4 \times 5 \times 7^3$ es un múltiplo de M? Explica tu respuesta. d) ¿$3^4 \times 5^3 \times 7^3 \times 13^{18}$ es un múltiplo de M? Explica tu respuesta.
Cuestión nº 5 Descompón el número 100: (Justifica tu respuesta) a) En dos factores. b) En tres factores. c) En el máximo número de factores. d) En factores primos
Cuestión nº 6 Una madre y una hija son guías turísticas. La madre vuelve a casa cada 15 días y la hija cada 12 días. El 6 de diciembre (Día de la Constitución) coinciden las dos en casa. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que se encuentren de nuevo? Explica cómo lo has hecho.
Cuestión nº 7 a) ¿Qué es el mínimo común múltiplo de dos números? b) ¿Qué es el máximo común divisor de dos números? c) Obtén el m.c.d (30,50) d) Obtén el m.c.m (30,50)
Cuestión nº 8 a) Se dispone de dos cuerdas de 12 m y 18 m de longitud, y se quieren obtener trozos iguales de la mayor longitud posible, de forma que su medida sea un número entero. ¿Cuál tiene que ser la longitud de cada trozo? Explica cómo has obtenido el resultado.

b) Tenemos tres cuerdas que miden 1980 cm, 990 cm y 756 cm, y queremos cortarlas en trozos de igual longitud. ¿Cuál será la mayor longitud en que podemos cortarlas, de forma que no sobre cuerda? ¿Cuántos trozos se han conseguido? Explica cómo has obtenido el resultado.
Cuestión nº 9 Sabiendo que: 1001 = 7 x 11 x 13 y 91 = 7 x 13, ¿son correctas las siguientes afirmaciones?: a) 91 no es divisor de 1001. b) 77 es divisor de 1001. c) 2002 no es múltiplo de 13 (Justifica tu respuesta)
Cuestión nº 10 Indica razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta: El número K = 2^2 x 3 x 5 x 11 + 3 es: a) Divisible por 5. b) Divisible por 2 y por 4. c) Divisible por 3. d) Divisible por 6. e) Divisible por 15