¿Cómo se enseña en la Universidad? El caso de los Números Reales

Ismenia Guzmán R. , Elisabeth Ramos, Arturo Mena L
Pontifícia Universidad Católica de Valparaíso
{iguzmanr, elisabeth.ramos, arturo.mena}@ucv.cl

Resumen. Buscamos explicaciones a la debilidad de los aprendizajes de los estudiantes de Cálculo Diferencial en el primer año de una universidad elegida para el estudio.
Realizamos una encuesta a profesores de la asignatura, con el objeto de investigar el tratamiento que ellos hacen de Números Reales en sus cursos de primer año de Ingeniería. Se seleccionaron temas habituales del Programa, y sobre ellos se plantearon siete preguntas: grado de dificultad y de importancia, distribución del tiempo, uso de ejemplos ilustrativos, planteo de ejercicios y problemas, tipo de presentación de la materia, metodología usada en clases. Procesando las respuestas con el Programa CHIC, obtuvimos información que es coherente con la percepción a priori que se tiene en general del desempeño de los profesores universitarios, y que nos permite avanzar una hipótesis acerca del perfil del quehacer docente de un profesor de Cálculo, a partir del cual podemos encontrar las explicaciones buscadas.

1 Problema de Investigación

Partimos de una pregunta muy simple ¿Cómo se enseña en los primeros años de la Universidad? No es un misterio que el pasaje de la Enseñanza media (liceo) a la Universidad es difícil para los estudiantes, especialmente para aquellos que no aprendieron a ser autónomos y organizados en el estudio, y esta es la situación de la gran mayoría. En la enseñanza media el proceso de enseñanza y aprendizaje está dirigido y controlado, en cambio en la Universidad la situación es otra: el proceso de aprendizaje es de responsabilidad del estudiante. ¿Qué ocurre entonces con el proceso de enseñanza? ¿Qué influencia tiene el proceso de enseñanza en el aprendizaje de los estudiantes?

En una investigación preliminar que hemos realizado en el marco del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática en el Instituto de Matemáticas de la PUCV, cuya meta era pesquisar el grado de dominio alcanzado por estudiantes, tanto de primeros años como de cursos superiores, sobre algunos conceptos matemáticos claves tales como los conceptos de función, de vector, de subespacio vectorial, de límite de una función, etc., los resultados no son edificantes: el grado de dominio obtenido ha sido muy débil y esto explica de algún modo el fracaso que tienen en los exámenes finales. Entonces nos surge la pregunta: ¿qué ocurre con la enseñanza?, o, con mayor precisión, ¿a qué proceso de enseñanza están siendo sometidos estos estudiantes? ¿qué actividades se les proponen? ¿con qué nivel de exigencias? Nuestro propósito en esta investigación es identificar ese proceso y encontrar algunos elementos que nos permitan describirlo.

2 Marco Teórico

El marco teórico de esta investigación contempla aspectos didacto-cognitivos en los que se fundamenta la elaboración de la encuesta que nos sirve de apoyo a la presente investigación y aspectos informáticos basados en el análisis implicativo con los diferentes tratamiento de la información que permite el software estadístico multidimencional de Clasificación Jerárquica Implicativa y Cohesitiva (CHIC)[1] a través del grafo y complementado por los árboles de cohesión y de similaridad.

Respecto a los aspectos didácticos: la elaboración de la Encuesta se ha basado en la estructura del capítulo del Programa oficial de la institución elegida (representativa en el país) sobre el tema de los Números Reales, y los sub temas seleccionados son los focalizados por el programa.

Como ha puesto de relieve Raymond Duval, debido a que los objetos matemáticos no son accesibles por los sentidos ni por medio de instrumentos materiales, como microscopios u otros, para su presentación y estudio es

[1] Programa realizado bajo la dirección del Dr. Régis Gras

necesario recurrir a representaciones semióticas. Ahora bien, según los trabajos de Duval, una representación semiótica depende de un determinado sistema de signos, los que constituyen un registro de representación semiótica –o, por brevedad, un registro– si permiten tres operaciones: representar un objeto matemático (o algunos de sus aspectos); realizar tratamientos al interior del registro, y convertir una representación de un registro de partida a otro de llegada.

En la presentación de las materias en la enseñanza de la matemática intervienen distintos registros, especialmente el algebraico, el gráfico y el del lenguaje natural. Según los trabajos de Duval, el proceso de comprensión se favorece por el uso de al menos dos de ellos, pero, por tradición en la enseñanza, se privilegia solo el algebraico.

Estas operaciones son comunes y espontáneas para los matemáticos, pero no lo son para los estudiantes, debido a que fácilmente confunden el objeto con su representación. Por otro lado, la enseñanza de la matemática da preferencia al registro algebraico-simbólico en desmedro sobre todo del registro lenguaje natural y muchas veces del registro gráfico, por cuestiones de rigor (y, a veces, de brevedad). Todo esto trae como consecuencia dificultades que inciden en el proceso de comprensión de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes.

Estas dificultades, de naturaleza cognitiva, sin duda son consecuencia, en algún grado, de los tratamientos de las materias que realizan los docentes, de los ejemplos que presentan, de los ejercicios y problemas que seleccionan para el estudio y que proponen en las evaluaciones.

Otro aspecto didáctico que tiene en cuenta esta investigación tiene que ver con la metodología de la clase. En general, en la enseñanza superior la clase típica es la expositiva, en la cual el discurso del profesor tiene un gran espacio, "se pasa materia" muchas veces con rapidez (confundiendo el tiempo de enseñanza con el de aprendizaje) lo que de algún modo dificulta el proceso de comprensión de los estudiantes, debido a la falta de tiempo para la reflexión. Todo esto se agrava cuando los ejemplos aclaratorios son escasos y los problemas que se seleccionan y/o se proponen son los clásicos y sus resoluciones son expuestas por el profesor en la pizarra, en el mejor de los casos con un diálogo con algunos estudiantes-aquellos que siguen el ritmo de la exposición-.

Por otra parte, ya mencionamos que nuestro marco teórico tomaba en cuenta aspectos estadísticos con apoyo del programa CHIC que permite estructurar y sintetizar los datos procesados. De esta manera pretendemos obtener un perfil de comportamientos de los profesores sometidos a la encuesta que sirve de base a esta investigación.

En nuestro caso nos interesan las frecuencias de las respuestas, cuyas alternativas admiten la codificación 0,1. (Cf. Anexo 1 Resolución esperada de la Encuesta).

Se trata de obtener una partición óptima en sub intervalos de valores y luego una implicación óptima de la unión de esos sub intervalos. A continuación exponemos una síntesis de las ideas clave de este análisis estadístico multidimensional según Régis Gras y su equipo.

3 Grafo implicativo

El grafo implicativo es un grafo en el cual las variables que poseen una intensidad de implicación superior a un cierto índice están ligadas por una flecha que representa la implicación. Se pueden seleccionar índices diferentes marcados en el grafo con distintos colores y estos valores los puede disponer el usuario como lo desee. Estos datos, CHIC los puede recuperar fácilmente, de manera que están disponibles para diferentes exploraciones y modificaciones (variables, talla de las flechas) del usuario. En un primer momento, CHIC ubica las variables sin minimizar de manera óptima los cruzamientos y, por ejemplo, las cadenas transitivas no se afichan en el grafo, pero el usuario tiene una buena opción para hacerlo en cualquier momento y también para suprimirlas. Otra opción permite conservar la frecuencia de ocurrencias y el usuario decidirá conservar aquellas que tienen un alto soporte (cercano al 90 %) y suprimir las de bajo soporte, lo que es de utilidad para la interpretación de resultados.

Es posible, además, elegir una zona de trabajo por defecto y hacerla evolucionar en el curso del estudio. Finalmente, CHIC permite salvaguardar diferentes estados de un grafo (disposición de variables, índices de implicación, selección o no de alguna variable), y así poner en evidencia diferentes partes del grafo.

4 Jerarquía Cohesitiva

Ella se basa en el criterio recursivo de la cohesión, el cual se representa por medio de una jerarquía ascendente, cuyo nivel está dado por la cohesión de las particiones orientadas de manera decreciente y cada vez menos finas, en el conjunto de las variables.

El índice de implicación entre dos variables está dado por el cálculo de la cohesión de la clase, éste da cuenta de la calidad de la implicación orientada, en una clase de variables y traduce la noción de meta regla o regla sobre regla.

Una Jerarquía ascendente o árbol cohesitivo traduce gráficamente un embotellamiento sucesivo de las clases constituidas según el criterio de cohesión que es decreciente a medida que aumenta en la jerarquía. Un nivel final de cohesión permite evitar constituir clases que no tengan un sentido implicativo, lo que se produce en las jerarquías clásicas, pero que están más conformes al campo semántico.

En el árbol de cohesión, las clases de variables están constituidas a partir de las implicaciones entre ellas.

El algoritmo agrega en cada etapa las variables conducentes a la cohesión más fuerte en ella y permite construir el árbol de manera casi sistemática y termina su proceso de construcción cuando la cohesión entre las variables aparece muy débil.

4.1 Tipicalidad y Contribución de los sujetos. Categorías de sujetos en los grafos y jerarquías implicativas.

La *tipicalidad y la contribución* consisten en primer lugar en medir la parte de "responsabilidad" de sujetos o de categorías de sujetos (variables suplementarias) en la génesis del grafo y del árbol. En segundo lugar, definir métricas en el conjunto de los sujetos y finalmente distinguir la tipicalidad (comportamiento en relación a las reglas contingentes) y la contribución (comportamiento en relación a las reglas formales).

4.2 Niveles y Nudos significativos

Las nociones de *nivel* y de *nudos significativos* están señaladas por flechas rojas que indican al usuario las clases sobre las cuales debe poner más atención respecto a los índices de implicación iniciales.

Ya sea que se trate de caminos del grafo implicativo o de clases cohesitivas, es interesante conocer su tipicalidad y contribución, para constatar cuál es la responsabilidad de los sujetos en la formación de ellas

4.3 Árbol de Similaridad

Este árbol se forma con las particiones cada vez menos finas del conjunto de las variables estudiadas; se construye de manera ascendente con ayuda de un criterio llamado de *similaridad*.

El análisis del árbol permite estudiar e interpretar, en términos de tipología y de semejanza estadística (o no semejanza), las clases de variables, constituidas significativamente, en ciertos niveles.

La similaridad se define a partir del producto cartesiano entre el conjunto de las variables y el conjunto de los sujetos. El criterio de similaridad en el caso de variables binarias (presencia/ausencia; sí/no; verdadero/falso...) se expresa de la manera siguiente:

Siendo E el conjunto de variables, dos variables a y b que satisfacen dos subconjuntos A y B de E son tanto más semejantes cuando k sujetos los verifican simultáneamente; es decir, aquellos de $A \cap B$, lo que es importante en consideración de por una parte de lo que habría sido en el caso de ausencia de ligazón a priori entre a y b y por otra parte, de los cardinales de E, A y B.

Se mide esta semejanza por la probabilidad de que k sea superior al número aleatorio esperado en esta situación donde sólo el azar intervendría. El índice entre las variables que le corresponde no está sesgado por el tamaño de $A \cap B$ y no coincide entonces con el coeficiente de correlación lineal.

La modelación probabilista de la variable aleatoria, donde k es la realización presente, puede ser Binomial o de Poisson, según lo desee el usuario. La segunda posibilidad supone que E sea una muestra de una población más amplia que la inicial, lo que no supone la primera. Si E no tiene ninguna razón estadística a priori de ser representativa, es preferible usar el modelo Binomial, que analiza la estructura de E en cuanto tal. Cuando los parámetros lo permiten, puede efectuarse una aproximación gaussiana de esas dos leyes.

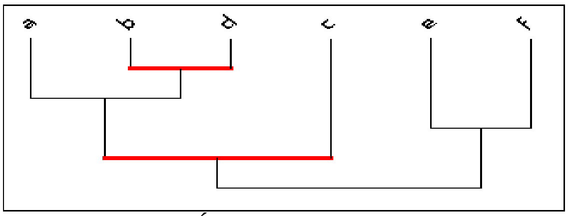


Fig. 1 Árbol de similaridad

El índice de similaridad entre variables sirve también para definir un *índice de similaridad entre dos clases* de variables según el mismo principio de comparación entre la *observación* y lo que *daría el azar*.

El árbol de similaridad da para cada par de variables la similaridad entre ellas y un algoritmo para formar nuevas clases, formadas por otras clases, como lo muestra el árbol.

5 Metodología

El diseño metodológico que hemos adoptado se apoya en una encuesta dirigida a profesores la que consta de siete preguntas sobre el tratamiento del capítulo dedicado a los números reales.

Las preguntas se refieren al grado de dificultad del tema para enseñarlo, la importancia que tiene, el tiempo que el profesor le dedica, el uso de ejemplos ilustrativos, la selección de ejercicios y problemas que hace y la metodología empleada en sus clases. Estas preguntas están referidas al tratamiento de la Axiomática, las Ecuaciones, las Inecuaciones y los Problemas de Aplicación.

Pregunta	Tema	Axiomática	Ecuaciones	Inecuaciones	Problemas de Aplicación
1	Grado de dificultad				
2	Grado de importancia				
3	Distribución del tiempo				
4	Ejemplos ilustrativos				
5	Ejercicios y Problemas				
6	Tipo de Presentación de la materia				
7	Metodología usada en clase				

Tabla 1. Preguntas de la encuesta

Las respuestas que se esperan para cada pregunta tienen cuatro alternativas.

Los profesores encuestados pertenecen a una institución universitaria representativa en el país cuyos docentes y tienen una formación sólida en matemáticas: grado de magíster o doctor.

Los datos recogidos en esta encuesta los procesamos a través del software estadístico multidimensional, de Clasificación Jerárquica Implicativa y Cohesitiva (CHIC) de modo que atendiendo a las exigencias del programa asignamos por ejemplo a las respuestas referidas a la pregunta Selección de Ejercicios y Problemas, 0: *no selecciona utiliza las guías preparadas*, 1: *Selecciona ejercicios rutinarios*, 2: *Selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos*, 3: *Selecciona Ejercicios y Problemas abiertos en distintos contextos, y con demostración*. Para el momento de la aplicación de la encuesta se había previsto poner énfasis en que las preguntas tenían como sujeto al profesor y a su quehacer. (Cf Anexo 2, alternativas de respuestas.

La presente investigación se interesa en conocer cómo enfrentan los profesores el tratamiento que realizan de acuerdo al grado de dificultad que encuentran al tratarlo en clases, el grado de importancia que le otorgan, al tiempo que le dedican, al uso de ejemplos ilustrativos, a la selección de ejercicios y problemas, al uso de los registros algebraico, de lenguaje natural y gráfico y tipo de metodología expositiva, con actividad de alumnos, con uso de tecnologías.

El tratamiento de la axiomática necesita una preocupación por parte del profesor en relación con la presentación del tema, lo que sobrepasa la exposición, debido a que hay que demostrar proposiciones de acuerdo con un marco teórico que no es del mundo sensible y no responde al sentido común, lo que trae dificultades a los estudiantes, porque es necesario haber aprendido a respetar ese marco teórico. Además, los conocimientos anteriores de los estudiantes al respecto los llevan a trabajar más por intuición que respetando reglas, axiomas, definiciones.

Las ecuaciones son difíciles porque también los conocimientos anteriores de los estudiantes obstaculizan la presentación de carácter matemático, más lejano de la técnica que ellos han aprendido en el liceo. La presentación de las ecuaciones se realiza en el registro algebraico que es también utilizado en el liceo.

Respecto a las inecuaciones la dificultad está en que la presentación necesariamente recurre a dos registros, el algebraico y el gráfico, y ya no se está en una situación de mono-registro como en las ecuaciones; además para la resolución de las inecuaciones es necesario situarse en un Cuerpo Ordenado, en cambio para las ecuaciones basta tener una estructura de Cuerpo. La dificultad para los estudiantes se presenta debido a que ellos no ven las diferencias mencionadas y utilizan las mismas técnicas de resolución en las ecuaciones e inecuaciones y por lo tanto se producen las equivocaciones.

Los ejemplos ilustrativos son muy importantes debido a su carácter aclaratorio. Los ejercicios y problemas clásicos son necesarios, pero mucho más relevantes son los problemas nuevos y los problemas abiertos, ya que apuntan tanto a la integración como a la transferencia y aplicación de los conocimientos. El profesor tiene un trabajo adicional en la selección de este tipo de problemas. En cambio para los ejercicios rutinarios y problemas clásicos están disponibles el texto institucional y/o las guías de la plataforma virtual.

6 Análisis de Resultados

Realizamos la codificación y procesamos los datos con el CHIC y obtuvimos los tres árboles que arroja el programa: estudiaremos el grafo implicativo, el árbol de cohesión y también el árbol de similaridad.

A continuación el grafo implicativo:

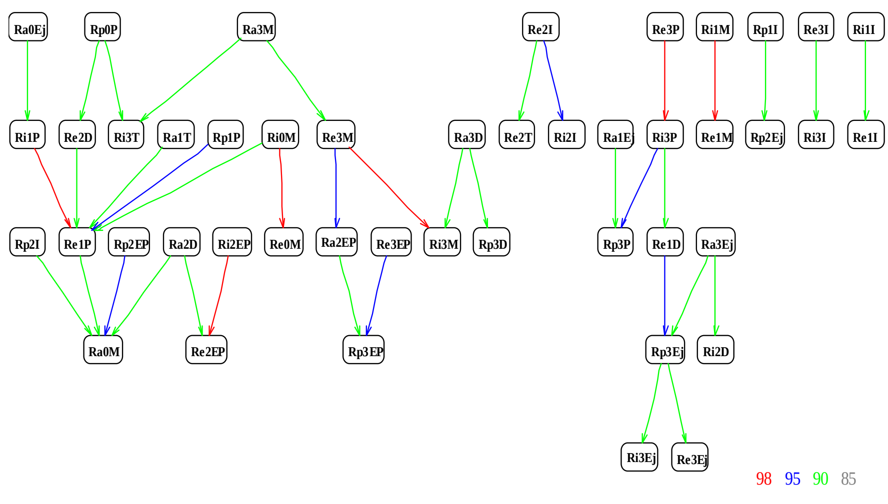


Fig. 2. Grafo implicativo

6.1 Análisis del grafo Implicativo

Leyendo este árbol de derecha a izquierda, se distinguen las tres ramas siguientes:

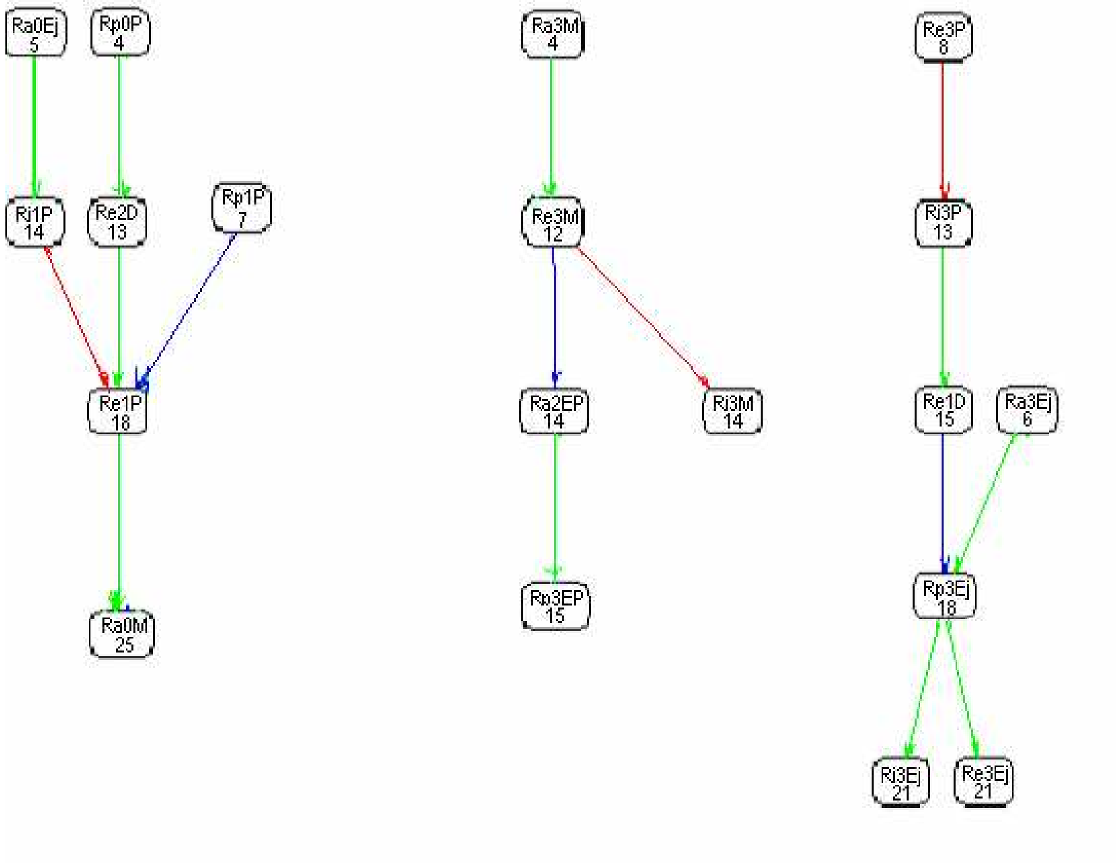


Fig. 3 Grafo implicativo. Detalle por rama

En la ***primera rama*** se distinguen tres caminos, siendo Ra0M un nudo:
Ra0Ej, Ri1P, Re1P, Ra0M
Rp0P, Re2D, Re1P, Ra0M
Rp1P , Re1P, RaOM

Se constata que el *primer camino* conecta a los docentes que dicen privilegiar lo algebraico y simbólico en los problemas de aplicación (Rp1P), también lo hacen en la presentación de las ecuaciones (Re1P) y afirman que no dan importancia a la axiomática en el tratamiento de los números reales (RaOM).

Se percibe en este grupo de respuestas que quienes señalan que privilegian lo expositivo para el tratamiento de la Axiomática (25/30), tratan las ecuaciones (18/30) privilegiando lo algebraico y simbólico. Posiblemente esto significa que la exposición se mantiene, y (13/30) señalan que encuentran bastante dificultad en el tratamiento de las ecuaciones.

El segundo camino de esta rama conecta a los docentes que afirman que privilegian lo conceptual y el uso del lenguaje natural en la presentación de los problemas de aplicación (Rp0P), ellos señalan encontrar bastante dificultad en el tratamiento de las ecuaciones (Re2D) y que privilegian lo algebraico y simbólico en la presentación de las inecuaciones (Ri1P), lo mismo para la presentación de las ecuaciones (Re1P). Señalan además que privilegian lo expositivo para la presentación de la axiomática (Ra0M).

El *tercer camino* conecta a los docentes que señalan no recurrir a ejemplos ilustrativos en la presentación de la Axiomática (Ra0Ej), que privilegian lo algebraico y simbólico en la presentación de las inecuaciones (Ri1P) y no dan importancia a la axiomática (Ra0M).

En este grupo 5 de 30 encuestados señalan que no recurren a ejemplos ilustrativos en la presentación de la axiomática; 18 de 30 señalan que presentan las ecuaciones privilegiando lo algebraico y simbólico; 14 de 30 también lo hacen en la presentación de las inecuaciones.

Como se puede constatar RaOM resulta un ítem básico, recibe 25 preferencias.

Esta primera rama muestra un profesor en cuyo quehacer docente se privilegia lo expositivo, lo algebraico y simbólico en la presentación de las materias y que señala encontrar bastante dificultad en el tratamiento de las ecuaciones. Dentro del grupo de profesores encuestados aquellos que cumplen con este perfil son los asignados por E7, E14 y E27.

La ***segunda rama*** contiene dos caminos

Ra3M, Re3M, Ra2Ep, Rp3Ep
Ra3M, Re3M, Ri3M

El *primer camino* conecta las respuestas de docentes que señalan que combinan metodologías para el tratamiento de la axiomática y lo mismo para el tratamiento de las ecuaciones; en el tercer ítem estos docentes señalan también que seleccionan ejercicios rutinarios y problemas clásicos para el tratamiento de la axiomática (Ra2Ep) y que seleccionan ejercicios y problemas abiertos para el caso de los problemas de aplicación (Rp3Ep).

El *segundo camino* coincide en los dos primeros ítem con el primero, pero en el tercero los encuestados señalan que seleccionan también combinan metodologías para el tratamiento de las inecuaciones.

El perfil de los profesores de esta rama se caracteriza por señalar que combinan metodologías para el tratamiento de la axiomática y ecuaciones, seleccionan ejercicios rutinarios y problemas clásicos en el tratamiento de la axiomática y seleccionan problemas abiertos para los problemas de aplicación.

Este perfil nos plantea interrogantes, ya que 12 de 30 profesores señalan combinar metodologías: ¿qué se entiende por combinar metodologías? ¿se refiere a la resolución de problemas? ¿a la presentación de las materias? Estas interrogantes nos indican que necesitamos complementar esta investigación con entrevistas formales –la investigación contempló entrevistas informales–, puesto que las preguntas no dan señales al respecto.

Dentro de los profesores encuestados, aquellos que cumplen con este perfil son los designados por E9, E16, E30 y E32.

En la ***tercera rama*** se distinguen cuatro caminos

Re3P, Ri3P, Re1D, Rp3Ej, Ri3Ej
Re3P, Ri3P, Re1D, Rp3Ej, Re3Ej
Ra3Ej, Rp3Ej, Re3Ej,
Ra3Ej, Rp3Ej, Ri3Ej

El *primer camino* conecta a los docentes que señalan combinar adecuadamente lo algebraico con lo gráfico en el tratamiento de las ecuaciones (Re3P), e igualmente para el tratamiento de las inecuaciones (Ri3P), pero dicen encontrar alguna dificultad en la enseñanza de las ecuaciones (Re1D) y señalan que utilizan dos o tres ejemplos ilustrativos por concepto en los problemas de aplicación (Rp3Ej) y lo mismo para el tratamiento de las inecuaciones (Ri3Ej).

El *segundo camino* coincide en los cuatro primeros ítems del primer camino y en el quinto Re3Ej señalan que utilizan dos o más ejemplos en el tratamiento de las ecuaciones.

El *tercer camino* de esta rama conecta a quienes señalan utilizar dos o más ejemplos ilustrativos por concepto en la presentación de la axiomática (Ra3Ej) y lo mismo para el caso de los problemas de aplicación (Rp3Ej) y también para el tratamiento de las ecuaciones (Re3Ej).

El *cuarto camino* coincide en los dos primeros ítems con el camino anterior, pero el tercer ítem (Re3Ej) indica la utilización de dos o más ejemplos en el tratamiento de las inecuaciones, lo mismo que señalaron en el caso de las ecuaciones.

Este grupo de profesores de3 la tercera rama se caracteriza por señalar que combina adecuadamente lo algebraico con lo gráfico en el tratamiento de las ecuaciones e inecuaciones, por encontrar alguna dificultad en la enseñanza de las ecuaciones y utilizar dos o más ejemplos en los tratamientos de las ecuaciones e inecuaciones.

Dentro de los profesores encuestados, aquellos que cumplen con este perfil son los designados por E15, E21, E25 y E32.

En esta primera lectura del árbol implicativo puede percibirse una coherencia en el quehacer que desarrollan los docentes, aun cuando aparecen ciertos fenómenos, por ejemplo el tratamiento que dicen hacer para las ecuaciones es el mismo que el que utilizan para las inecuaciones. Y es sorprendente que la mayoría de los docentes (25 de 30) señale que no le da importancia al tratamiento de la axiomática.

6.2 Análisis del Árbol Cohesitivo (Árbol en Anexo 3)

De este árbol seleccionamos 20 niveles (Cf. Anexo 3), pero solamente analizaremos los más significativos.

En el árbol de cohesión se constata que el tratamiento de las ecuaciones y el de las inecuaciones son similares, en la selección de los ejemplos, de ejercicios rutinarios y problemas; en la metodología que se utiliza y los problemas de aplicación que ellos seleccionan; en la presentación, los profesores señalan que privilegian los registros algebraico y simbólico.

Los seis primeros niveles del árbol de cohesión se refieren al tratamiento de las ecuaciones y las inecuaciones:

El nivel 1 se refiere al uso de ejemplos ilustrativos y 21 profesores señalan que usan uno o más en sus tratamientos. El resto de los profesores (9) señala que usa un ejemplo por concepto.

En el nivel 2 de cohesión (0.998) encontramos 19 profesores que señalan que seleccionan ejercicios rutinarios y problemas clásicos.

En el nivel 5 (0.993) encontramos 14 profesores que señalan que privilegian lo algebraico en la presentación de estos temas.

En el nivel 6 (0.889) 17 profesores señalan que dan bastante importancia a las ecuaciones e inecuaciones.

Respecto a la metodología (expositiva, actividad del alumno, tecnologías), en el nivel 8 (0.878) 12 profesores señalan que las combinan en estos temas y para la presentación de la axiomática seleccionan ejercicios rutinarios y problemas clásicos.

6.3 Análisis del árbol de Similaridad (Cf. Anexo 4)

Este árbol corrobora las informaciones encontradas en el árbol de cohesión, pero se destaca que 13 profesores señalan que encuentra alguna dificultad en el tratamiento de las ecuaciones y usan dos o más ejemplos ilustrativos por concepto en los problemas de aplicación. Además, 9 profesores señalan que encuentran bastante dificultad en el tratamiento de los problemas de aplicación y le dan alguna importancia a la presentación de la axiomática y 18 profesores señalan que dedican el tiempo estipulado al tratamiento de la axiomática y de las ecuaciones.

7 Conclusiones

Estos primeros resultados de la investigación nos da algunas evidencias empíricas de una panorámica de la docencia que se imparte a nivel universitario; si bien este es un estudio cualitativo permite plantear algunas hipótesis, para una próxima investigación que comprenda una población mayor de encuestados.

Señalaremos tres hechos :

Primero, resulta sorprendente que la mayoría señale que realiza un tratamiento similar para las ecuaciones e inecuaciones, este un fenómeno didáctico a estudiar. Las ecuaciones e inecuaciones son objetos matemáticos distintos, por lo que hay diferencias en su funcionamiento: aunque tengan propiedades que sean similares, en la enseñanza deben tener énfasis las diferencias. La mayoría de los profesores nos dijo "es claro que hay diferencias", entonces ¿por qué los estudiantes no las ven y trabajan con las inecuaciones tal como lo hacen con las ecuaciones ?

Este fenómeno nos lleva a la siguiente reflexión acerca de dos tópicos relacionados con nuestro tema: el de ecuaciones e inecuaciones y el de la axiomática de los números reales.

7.1 Ecuaciones e Inecuaciones

Es claro que un (sistema de) ecuación (ecuaciones) es un caso particular de un (sistema de) inecuación (inecuaciones). En efecto y por ejemplo, la ecuación $ax+b=0$ es la conjunción de las inecuaciones $ax+b \geq 0$ y $0 \geq ax+b$.

Lo anterior no significa, evidentemente, que el tratamiento de las ecuaciones para los estudiantes se consiga como caso especial del de las inecuaciones. Ello no solo porque las inecuaciones resultan ser un conocimiento 'más avanzado' y que debe por tanto ser precedido del de las ecuaciones, sino porque, desde un punto de vista propiamente matemático, hay una diferencia crucial, bien conocida:

El ambiente natural de la resolución de ecuaciones es el de un Cuerpo (conmutativo) (el de los números reales, claro está). El procedimiento de resolución de ecuaciones simples se basa en dos propiedades que se deducen en forma inmediata de la estructura de cuerpo:

Sean a,b,c números reales. Entonces:

Si $a = b$, entonces $a+c = b+c$ (e inversamente)

Si $a = b$ y $c \neq 0$ entonces $ac = bc$ (e inversamente)

Por oposición a lo anterior, el ambiente natural de la resolución de inecuaciones simples es el de un Cuerpo (conmutativo) ordenado (el de los números reales). Para resolver inecuaciones simples, hay que recurrir no a propiedades deducibles de la estructura de cuerpo, sino a propiedades (axiomas) de compatibilidad de las operaciones con la relación de orden:

Sean a,b,c números reales. Entonces:

Si $a \geq b$, entonces $a+c \geq b+c$ (e inversamente)

Si $a \geq b$ y $c > 0$ entonces $ac \geq bc$ (e inversamente)

La diferencia crucial en el aprendizaje está en la multiplicación: si bien para el caso de las ecuaciones la restricción $c \neq 0$ en *2.* produce ocasionales dificultades si se la olvida (pero situaciones que contengan esa dificultad no son frecuentes, o bien el profesor no las enfatiza o tal vez ni siquiera las mencione), para el caso de las inecuaciones la restricción $c > 0$ en *4.* es de uso tan habitual que se constituye naturalmente en el instrumento que muestra si el estudiante ha aprendido la resolución de inecuaciones simples o no lo ha hecho.

Todo lo anterior tiene sus traducciones al registro gráfico (en términos de diagramas cartesianos), en los que también se puede apreciar la diferencia substantiva que hay entre tratar con ecuaciones y con inecuaciones, respectivamente: si en una basta con intersectar rectas o curvas simples (lo que dará generalmente una colección finita de puntos), en la otra ya en el caso lineal hay que habérselas con semiplanos (cuya intersección da regiones del plano, no numerables).

En cualquier caso, una muestra indirecta de la distancia que hay para un alumno entre las ecuaciones y las inecuaciones se puede obtener a partir de la siguiente observación:

Frente a un sistema de ecuaciones lineales indeterminado, un alumno encontrará que tiene una cantidad abundante de soluciones y se inclinará por escribir, como respuesta, la ingenua expresión “infinitas soluciones” –sin preocuparse mayormente de cuáles son–. En cambio, frente a una inecuación, él sabe que las soluciones son, casi siempre, infinitas, pero tiene muy claro que en ese caso no le bastará con decir que hay “infinitas soluciones”.

En segundo lugar, otro hecho que llama la atención es el referente la axiomática de los Números reales: la gran mayoría la presenta con una metodología expositiva y dedicándole el tiempo estipulado en el programa. En las entrevistas informales algunos profesores opinaron que para los estudiantes es difícil esta parte, y dado que ya aprendieron algunas reglas en el liceo, para qué complicarlos si ello no es materia de pruebas.

Percibimos aquí un claro efecto Jourdain, y por otro lado nos surge la pregunta ¿por qué no es materia de prueba? Y a partir de ella surgen nuevas preguntas, ¿qué rol juega la lógica entonces en un curso de matemáticas de primer año universitario, en particular en uno de Cálculo? ¿Se reduce a las técnicas sin explicaciones de los *por qué*?

Por otra parte, en ausencia de axiomática, la matemática se transforma en un proceso deductivo sin asidero inicial, de manera que es difícil separar la heurística o el razonamiento plausible del razonamiento correcto. Esto último no parece, en principio, tan grave pues, en la práctica, cada quien dará algunas cosas por sabidas, simplemente (si bien en muchos casos sería mejor hacer ese proceso en forma consciente). Sin embargo, si no se tiene cuidado, será difícil distinguir entre el cuerpo ordenado los números reales del cuerpo ordenado de los números racionales: después de todo, lo que hace la diferencia, cualquiera sea la presentación que se haga de ellos, es, al fin y al cabo (una versión equivalente a) el axioma del supremo.

7.2 Comentario Final

Respuestas de estudiantes a problemas simples, por ejemplo, sobre la definición de límite de una función, dejaron en evidencia aplicaciones de técnicas de cálculo; fue lo que nos motivó a preguntarnos qué enseñanza recibieron estos estudiantes, y a elaborar la encuesta estudiada la cual encuentra en lo anterior alguna explicación.

Finalmente, la pregunta sobre el uso de metodologías no nos quedó clara: nosotros nos referíamos a privilegio de clases expositivas, o con énfasis en al actividad del estudiantes, o uso de tecnologías, y muchos lo entendieron así, pero otros lo confundieron con la presentación de las materias respecto al privilegio de algún registro: algebraico, gráfico o lenguaje natural.

Lo que nos alerta para la próxima aplicación de la encuesta.

Bibliografía

Duval R., 2000, “Especificidad de los objetos matemáticos”, Semana de la Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Duval R., 2000, “Un tema crucial en la educación Matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación”. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, RSME, Vol 9, N° 1, pp. 143-168

Duval R., 2004, “Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores en el Desarrollo Cognitivo”. Curso de Doctorado. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Gras, R., 2004, L'analyse statistique implicative: ses bases, ses développements, http://math.unipa.it/~grim/asi/asi_03_gras.pdf

Saddo, A. A., 2006, “Instrumentos de Análisis de datos multidimensionales”, Seminario, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Resumé

Cette recherche vise à donner quelques raisons aux déficiences des étudiants en matière de calcul différentiel, dont le taux d'échec est important dans les examens de fin de formation.

Une enquête a été faite à des professeurs d'université chargés de l'enseignement du calcul différentiel, pour observer comment ils traitaient le chapitre intitulé "Nombres réels" dans le première année des carrières d'ingénieur.

Les thèmes retenus pour l'enquête correspondent aux contenus habituels du programme d'enseignement, ont fait l'objet de 7 questions: difficulté, importance du thème, organisation du temps, recours à des exemples d'illustration, proposition d'exercices et de problèmes, type de présentation du contenu, méthodologie d'enseignement utilisée par le professeur. Le programme CHIC nous a fourni des informations en cohérence avec ce que l'on dit habituellement sur cet enseignement, et la recherche permet ainsi d'avancer une hypothèse sur le profil de la tâche enseignante que se donne un professeur de calcul différentiel, ce qui nous ouvre des pistes pour les raisons cherchées.

Abstract

This research aims to find some explanations for the weaknesses on the learning of students in Differential Calculus in a college chosen for the study.

We made a survey on instructors of the subject, to investigate their treatment of the customary Chapter on Real Numbers in their first year courses for engineering majors. We selected subjects corresponding to the usual contents of the Program, and we raised seven questions about them: degree of difficulty, importance assigned to the subject, distribution of time, use of illustrative examples, employ of exercises and problems, style of presentation of the subject, methodology used in classes. By processing the answers with CHIC Software, we have obtained data that are quite coherent with the usual a priori perception of the performance of university instructors, and that allow us to formulate a hypothesis on the profile of the educational task of a Differential Calculus instructor, from which we can obtain some of the explanations looked for.

Anexos

Anexo 1. Resolución esperada de la encuesta

Pregunta	Tema	Axiomática	Ecuaciones	Inecuaciones	Problemas de Aplicación
1	Grado de dificultad	2	2	3	2
2	Grado de importancia	3	2	2	3
3	Distribución del tiempo	3	2	2	3
4	Ejemplos ilustrativos	3	3	3	3
5	Ejercicios y Problemas	3	3	3	3
6	Tipo de Presentación de la materia	0	1	3	3
7	Metodología usada en clase	3	3	3	3

Anexo 2. Las alternativas de respuestas en el siguiente cuadro:

	Pregunta N°1: **Sobre el grado de dificultad del Tema**
0	Sin Dificultad
1	Alguna dificultad
2	Bastante Dificultad
3	Mucha dificultad

	Pregunta Nº2: **Sobre el Grado de Importancia del Tema**
0	Sin importancia
1	Alguna Importancia
2	Bastante Importancia
3	Mucha importancia

	Pregunta Nº3: **Sobre el Tiempo Dedicado (programa)**
0	No le da tiempo
1	Menos de lo estipulado
2	Lo estipulado
3	Más de lo estipulado

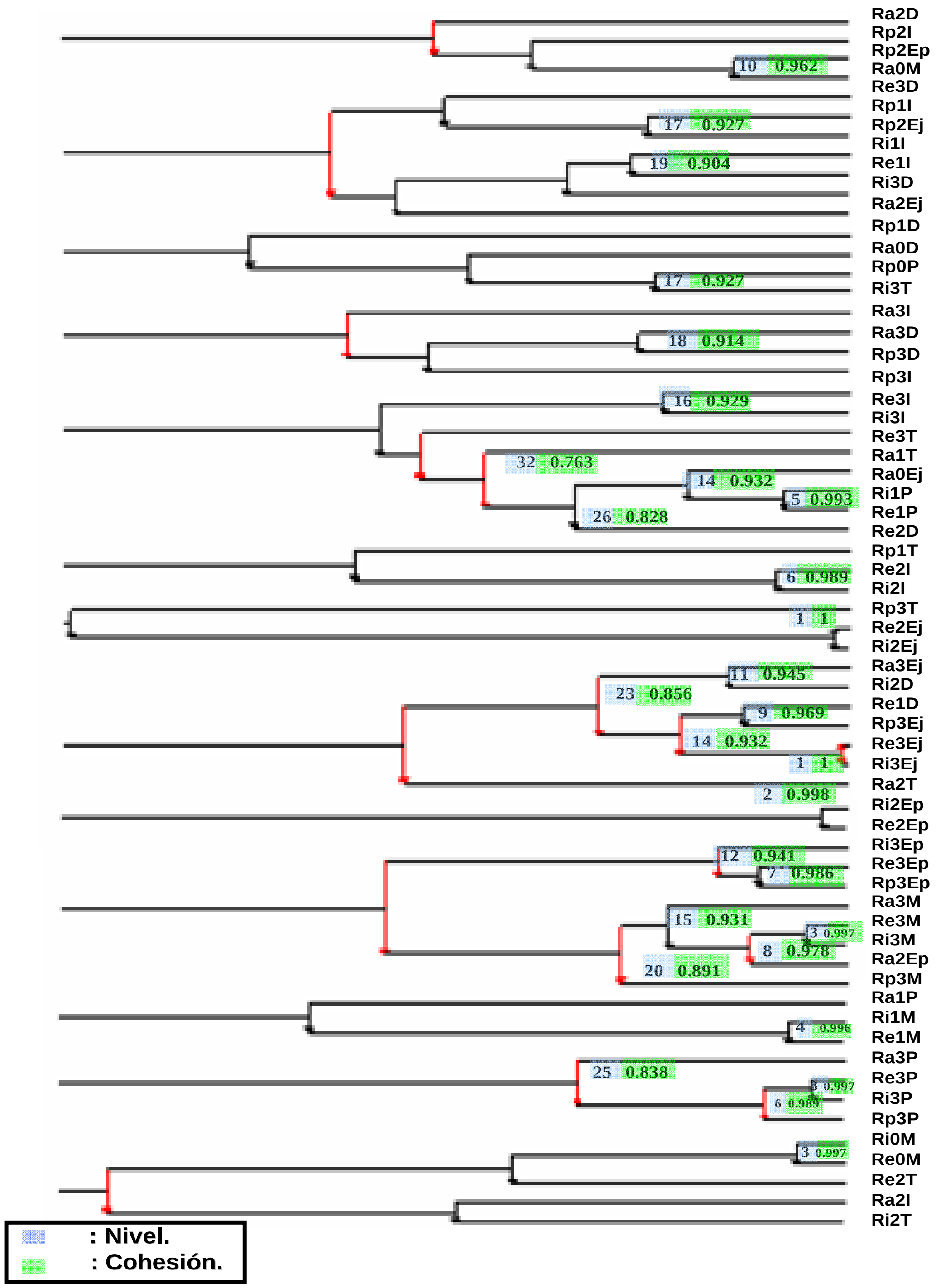
	Pregunta Nº4: **Sobre el uso de Ejemplos ilustrativos**
0	No usa
1	Usa a veces
2	Usa uno por concepto
3	Usa dos o más por concepto

	Pregunta Nº5: **Sobre la selección de Ejercicios y Problemas**
0	No selecciona, utiliza guías
1	Selecciona ejercicios rutinarios
2	Selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos
3	Selecciona ejercicios y problemas abiertos en distintos contextos, y con demostración

	Pregunta Nº6: **Sobre el Tipo de presentación de la materia**
0	Privilegia lo conceptual y el lenguaje natural.
1	Privilegia lo algebraico y lo simbólico
2	Privilegia lo gráfico
3	Combina adecuadamente lo algebraico y gráfico

	Pregunta Nº7: **Sobre la Metodología usada en clases**
0	Privilegio de la exposición
1	Privilegia la actividad de alumnos
2	Privilegia la tecnología
3	Combina metodologías

Anexo 3: 20 niveles del árbol de cohesión



Anexo 4: Interpretación del árbol de cohesión

Nivel	Cohesión	Red	Interpretaciones
1	1	Re3Ej **(21)**- Ri3Ej **(21)**	Usa uno o más ejemplos ilustrativos por concepto en el tratamiento de las ecuaciones e inecuaciones.
	1	Re2Ej **(9)** - Ri2Ej **(9)**	Usa un ejemplo por concepto tanto en las ecuaciones como en las inecuaciones.
2	0.998	Ri2EP **(19)** Re2EP **(20)**	Selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos tanto en las ecuaciones como en las inecuaciones.
3	0.997	Re3P **(8)** - Ri3P **(13)**	Combina adecuadamente lo algebraico y lo gráfico en ecuaciones como en inecuaciones.
		Re3M **(12)** - Ri3M **(14)**	Combina metodologías (expositivas, actividad del alumno, tecnologías) en las ecuaciones y en las inecuaciones.
	0.997	Ri0M **(6)** - Re0M **(11)**	Privilegia lo expositivo como metodología, tanto en las ecuaciones como en las inecuaciones.
4	0.996	Ri1M **(10)** - Re1M **(11)**	Privilegia la actividad del alumno como metodología en las inecuaciones como en las ecuaciones.
5	0.993	Ri1P **(14)** - Re1P **(18)**	Privilegia lo algebraico y lo simbólico en la presentación de las inecuaciones y también de las ecuaciones.
6	0.989	Re2I **(17)** - Ri2I **(18)**	Da bastante importancia a las ecuaciones como a las inecuaciones.
		[Re3P **(8)** - Ri3P (**13**)] - Rp3P **(18)**	Combina adecuadamente lo algebraico y lo gráfico en ecuaciones como en inecuaciones y también en los problemas de aplicación.
7	0.986	Re3EP **(7)** - Rp3EP **(15)**	Selecciona ejercicios y problemas abiertos en distintos contextos y con demostración en las ecuaciones y en problemas de aplicación.
8	0.978	[Re3M **(12)** - Ri3M **(14)**] - Ra2EP **(14)**	Combina metodologías (expositivas, actividad del alumno, tecnologías) en las ecuaciones como en las inecuaciones. Además, selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos en la Axiomática.
9	0.969	Re1D **(6)** - Rp3Ej **(18)**	Encuentra alguna dificultad en el tratamiento de las ecuaciones y usa dos o más ejemplos ilustrativos por concepto en las problemas de aplicación.
10	0.962	Rp2EP **(14)** - Ra0M **(25)**	Selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos en los problemas de aplicación y privilegia la exposición en la Axiomática.
11	0.945	Ra3Ej **(6)** - Ri2D **(17)**	Usa dos o más ejemplos ilustrativos por concepto en la axiomática y encuentra bastante dificultad en el tratamiento de las inecuaciones.
12	0.941	Ri3EP **(7)** - [Re3EP **(7)** - Rp3EP **(15)**]	Selecciona ejercicios y problemas abiertos en distintos contextos y con demostración en las inecuaciones y también en las ecuaciones y en

			problemas de aplicación.
13	0.937	[Ra4P **()** - Ri4P **()**] - [Re4P **()** - Rp4P **()**]	Sin respuesta.
14	0.932	Ra0Ej **(5)** – [Ri1P **(14)** - Re1P **(18)**]	No usa ejemplos ilustrativos en la Axiomática y privilegia lo algebraico y simbólico en las inecuaciones y ecuaciones.
		[Re1D **(4)** - Rp3Ej **(18)**] – [Re3Ej **(21)** - Ri3Ej **(21)**]	Encuentra alguna dificultad en el tratamiento de las ecuaciones y usa dos o más ejemplos ilustrativos por concepto en los problemas de aplicación. Además, usa de uno o más ejemplos ilustrativos por concepto en el tratamiento de las ecuaciones e inecuaciones.
15	0.931	Ra3M **(4)** – [[Re3M **(12)** - Ri3M **(14)**] - Ra2EP **(14)**]	Combina metodologías en la Axiomática, ecuaciones e inecuaciones y además en la Axiomática selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos.
16	0.929	Re3I **(6)** - Ri3I **(9)**	Da mucha importancia a las ecuaciones e inecuaciones.
17	0.927	Rp0P **(7)** - Ri3T **(11)**	Privilegia lo conceptual y el lenguaje natural en los Problemas de aplicación y dedica más tiempo de lo estipulado (según el programa) al tratamiento de las Inecuaciones.
		Rp1I **(4)** - Rp2Ej **(11)**	Da mucha importancia a problemas de aplicación y usa un ejemplo ilustrativo por concepto en las inecuaciones.
18	0.914	Ra3D **(7)** - Rp3D **(13)**	Encuentra mucha dificultad en la Axiomática y en Problemas de aplicación.
19	0.904	Ri1I **(3)** - Re1I **(6)**	Le da alguna importancia a las Inecuaciones como a las Ecuaciones.
20	0.891	[Ra3M **(4)** – [[Re3M **(12)** - Ri3M **(14)**] - Ra2EP **(14)**]] - Rp3M **(15)**	No usa ejemplos ilustrativos en la Axiomática y privilegia lo algebraico y simbólico en las inecuaciones y ecuaciones. Además, combina metodologías en Problemas de aplicación.

Anexo 5 . Descripción del árbol de similaridad

Nivel	Clase (Frecuencia)	Similaridad	Sujetos	Interpretaciones
33	Re2Ej, Ri2Ej (9)	0.999976	E27 E30 E5 E11 E17 E12 E7 E23 E19	Usa un ejemplo por concepto tanto en las ecuaciones como en las inecuaciones.
45	Re1M, Ri1M (9)	0.998651	E7 E4 E18 E17 E15 E19 E8 E23 E21	Privilegia la actividad del alumno como metodología en las inecuaciones como en las ecuaciones.
54	Re3M, Ri3M (11)	0.993955	E26 E32 E30 E31 E9 E5 E2 E13 E24 E22 E16	Combina metodologías (expositivas, actividad del alumno, tecnologías) en las ecuaciones como en las inecuaciones.
69	Re3Ej, Ri3Ej (21)	0.974085	E21 E22 E29 E31 E32 E28 E24 E25 E26 E4 E6 E8 E1 E2 E3 E15 E16 E18 E9	Usa uno o más ejemplos ilustrativos por concepto en el tratamiento de las ecuaciones y de las inecuaciones.

			E10 E13	
70	Re1P, Ri1P (13)	0.966096	E28 E27 E4 E31 E1 E3 E19 E13 E14 E7 E5 E24 E6	Privilegia lo algebraico y lo simbólico en la presentación de las inecuaciones y también de las ecuaciones.
71	Re2EP, Ri2EP (18)	0.96225	E5 E26 E24 E25 E1 E31 E2 E3 E4 E17 E15 E14 E12 E9 E23 E6 E8 E19	Selecciona ejemplos ilustrativos y problemas clásicos tanto en las ecuaciones como en las inecuaciones.
72	Ra2EP, Re3M, Ri3M (11)	0.962198	E13 E32 E31 E30 E26 E9 E5 E2 E24 E22 E16	Combina metodologías (expositivas, actividad del alumno, tecnologías) en las ecuaciones y en las inecuaciones. Además, selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos en la Axiomática.
74	Re2I, Ri2I (15)	0.960659	E26 E25 E31 E29 E30 E28 E24 E9 E10 E12 E11 E3 E22 E21 E19	Da importancia a las ecuaciones como a las inecuaciones.
78	Re1D, Rp3Ej (13)	0.941875	E31 E32 E25 E13 E12 E10 E9 E3 E22 E21 E18 E16 E15	Encuentra alguna dificultad en el tratamiento de las ecuaciones y usa dos o más ejemplos ilustrativos por concepto en los problemas de Aplicación.
87	Rp2D, Ra1I (9)	0.880464	E32 E31 E30 E29 E18 E8 E7 E6 E3	Encuentra bastante dificultad en el tratamiento de los problemas de aplicación y le da alguna importancia a la Axiomática.
90	Ra2I, Ri2T (9)	0.832979	E28 E15 E13 E2 E22 E19 E25 E11 E27	Le da alguna importancia a la Axiomática y dedica el tiempo estipulado (según el programa) al tratamiento de las Inecuaciones.
92	Ra2Ej, Rp3M (9)	0.829325	E30 E16 E13 E4 E2 E23 E22 E21 E19	Usa un ejemplo ilustrativo por concepto en la Axiomática y combina metodologías en los problemas de aplicación
94	Rp2EP, Ra0M (14)	0.82278	E4 E5 E29 E1 E31 E14 E25 E10 E19 E18 E11 E6 E12 E8	Selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos en los problemas de aplicación y privilegia la exposición en la Axiomática.
99	Ra2T, Re2T (18)	0.714625	E26 E27 E25 E24 E28 E32 E31 E30 E1 E18 E17 E10 E8 E19 E23 E22 E21 E9	Dedica el tiempo estipulado (según el programa) al tratamiento de la Axiomática y en las Ecuaciones.
107	Re1D, Rp3Ej, Rp3I, Re3Ej, Ri3Ej (12)	0.491846	E25 E3 E31 E13 E21 E32 E15 E10 E9 E22 E18 E16	Encuentra alguna dificultad en el tratamiento de las ecuaciones y usa dos o más ejemplos ilustrativos por concepto en los problemas de aplicación. Además, usa uno o más ejemplos ilustrativos por concepto en el tratamiento de las ecuaciones y de las inecuaciones.