L’analyse implicative au service de l’évaluation d’étudiants futurs professeurs des écoles et de leur formation en géométrie plane

Françoise Jore

Université Catholique de l’Ouest
Institut de Mathématiques Appliquées
3, Place André Leroy
BP 10808
49008 ANGERS Cedex 01
France
jore@uco.fr
http://www.ima.uco.fr/jore/

Résumé. Dans le cadre d’un travail autour des paradigmes géométriques G1 et G2, un dispositif de formation a été mis en place auprès de futurs professeurs des écoles en formation initiale. Il s’agit dans cet article de montrer comment l’analyse implicative permet d’étudier le rapport entre des procédures de construction à la règle et au compas et le langage utilisé pour décrire les scénarios de construction correspondants, ce qui est l’occasion de faire un bilan sur certaines compétences des étudiants en début de formation, ainsi que d’analyser la lucidité des étudiants du point de vue de leur rapport aux paradigmes G1 et G2, ce qui est alors l’occasion d’évaluer l’efficacité de la formation.

1 Introduction

Dans l’épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles (CRPE), les étudiants doivent être capables d’effectuer des démonstrations simples, qui relèvent du collège. Cela nécessite entre autres de maîtriser un minimum de théorèmes de géométrie euclidienne. Or, si tous ces théorèmes ont déjà été travaillés au collège, certains sont peu mobilisables, voire parfois non disponibles, souvent non opérationnels. Par ailleurs, de nombreux sujets de concours demandent aux candidats d’effectuer des constructions à la règle et au compas. Dans certains cas, la rédaction d’un scénario de construction est également demandée. Indépendamment du concours, « rédiger un scénario de construction » fait partie des compétences travaillées au cycle 3, et par conséquent doit être maîtrisé par les futurs enseignants, ce qui n’est pas du tout le cas en début de formation. A côté de ce travail très lié au concours, un travail de fond dans le domaine de la géométrie mérite d’être effectué avec ces étudiants, concernant leur relation aux objets géométriques, objets physiques ou objets théoriques, sur lesquels ils travaillent. Or le temps de formation est toujours limité. Il s’agit donc de profiter au mieux du faible temps dont le formateur dispose. Dans le cadre de ma thèse (Jore 2006), j’ai ainsi été amenée à proposer un dispositif de formation en géométrie plane pour les étudiants qui préparent ce concours. Il s’agit alors d’évaluer dans quelle mesure une formation nécessairement courte, permet néanmoins de faire évoluer ce rapport des étudiants aux objets géométriques.

Dans cet article, nous présenterons brièvement le cadre théorique des paradigmes géométriques, puis le dispositif de formation mis en place. Nous nous intéresserons alors à détailler deux situations où l’analyse implicative s’est révélée fort pertinente. Nous analyserons tout d’abord une situation de construction de tracé de triangle rectangle, avec rédaction de scénario de construction et de justification, où l’enjeu est entre autres de déterminer le lien entre les procédures et le langage utilisé. Elle permet en parallèle de faire un état des lieux des compétences des étudiants en début de formation sur ce type de tâche. Une situation problème autour de la médiatrice proposée aux étudiants permet ensuite de mettre en évidence la lucidité des étudiants du point de vue de ces paradigmes géométriques, et ainsi d’évaluer en partie l’efficacité de la formation proposée.

2 Cadre théorique

Le cadre théorique de référence de ce travail est celui des paradigmes géométriques de Parzysz (Parzysz 2002), construits à partir de ceux de Houdement et Kuzniak (Houdement et Kuzniak 1999 et 2000) et reformulés et détaillés dans ma thèse (Jore 2006). Considérons la question suivante, posée à plus de 800 futurs professeurs des écoles, en début de formation initiale en l'IUFM[1] ou CFP[2] :

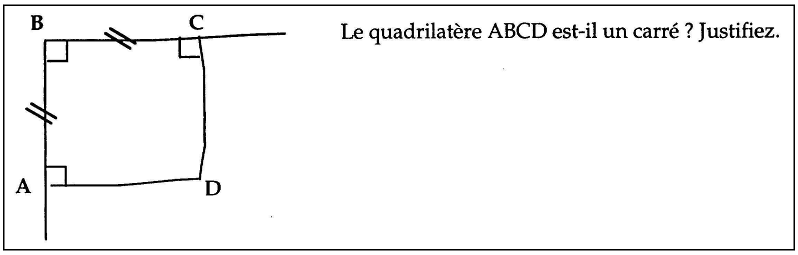

FIG. 1 – *Le quadrilatère ABCD est-il un carré ?*

43 % des étudiants affirment : « ce n'est pas un carré », tandis que 51 % répondent le contraire, même si la rigueur mathématique de leur justification dans ce cas laisse parfois à désirer … L'analyse de leurs justifications permet de mettre en évidence les caractéristiques des deux paradigmes géométriques qui nous intéressent. L'étudiant qui ne considère pas ABCD comme un carré se situe dans le paradigme **G1** (géométrie spatio-graphique) : il considère le dessin qu'il a sous les yeux comme un **objet physique**. C'est l'objet géométrique sur lequel il travaille. Pour conclure que ce n'est pas un carré, il utilise une **validation de type perceptif** (concrètement, il regarde le dessin, par exemple pour constater que « [CD] n'est pas correctement tracé »), éventuellement instrumenté (il peut prendre l'équerre pour étudier l'angle en D ou le compas pour comparer les longueurs). L'étudiant qui considère ABCD comme un carré se situe dans le paradigme **G2** (géométrie proto-axiomatique) : il considère le dessin qu'il a sous les yeux comme le **représentant** d'un **objet géométrique théorique**. C'est cet objet théorique sur lequel il travaille. Pour conclure, il utilise une **validation de type hypothético-déductif** ; il s'agit d'un raisonnement, basé sur les informations codées sur le dessin et les théorèmes de la géométrie euclidienne.[3] Le tableau ci-dessous récapitule les principales caractéristiques des paradigmes G1 et G2.

	Géométrie spatio-graphique G1	Géométrie proto-axiomatique G2
Statut du dessin	objet géométrique étudié	représentant d'un objet géométrique théorique
Nature de l'objet géométrique étudié	dessin (réalité spatio-graphique)	objet géométrique théorique défini par une formulation discursive
Type de validation	essentiellement perceptif	uniquement hypothético-déductif
Outils de validation	règle (graduée ou non), équerre, compas, papier calque, papier quadrillé, …	règles de la logique et théorèmes de la géométrie euclidienne
Nature des expériences	effectives (le plus souvent)	mentales, virtuelles
Constructions	réalisation effective (physique, matérielle) d'un tracé	algorithme d'obtention d'un objet sous contraintes fixées
Instruments de construction	règle (graduée ou non), équerre, compas, papier calque, papier quadrillé, …	objets et théorèmes de la géométrie euclidienne (en particulier droites et cercles)
Définitions	basées sur la perception et l'exclusion, par opposition	basées sur les propriétés géométriques et l'inclusion, par caractérisation

TAB 1 – *Eléments caractéristiques des paradigmes G1 et G2.*

[1] Les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres en France ont pour mission de former les futurs enseignants, après trois années d'études post-baccalauréat.
[2] Les Centres de Formation Pédagogique sont l'équivalent des IUFM pour l'enseignement privé.
[3] Concrètement ici, il peut par exemple utiliser un premier théorème pour conclure au rectangle (tout quadrilatère comportant trois angles droits est un rectangle), puis un second pour conclure au carré (tout rectangle qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un carré).

En particulier, les constructions peuvent être considérées dans G1 ou dans G2. Dans G1, il s'agit de réaliser effectivement la construction aux instruments, généralement règle et compas, sur un support matériel. L'objet final est un objet physique, et les éventuelles validations sont alors perceptives. Au contraire, dans G2, même si le même vocabulaire est éventuellement utilisé, en particulier le verbe « construire », il s'agit de déterminer un objet géométrique théorique à partir d'autres objets géométriques théoriques, en l'occurrence des droites, des cercles et des intersections pour les constructions dites « à la règle et au compas ». La validation de la construction est alors d'ordre hypothético-déductif : il s'agit d'expliciter les définitions, propriétés, théorèmes, axiomes qui justifient l'existence de chacun des objets de la construction (points, droites, cercles, intersections).

Ces paradigmes présentent une cohérence interne que les productions des étudiants ne respectent pas toujours : ils sont souvent, au lieu de travailler entièrement dans G1 ou dans G2, dans un « pseudo-paradigme » qui tient à la fois de G1 et de G2, considérant par exemple successivement l'objet sur lequel ils travaillent physique puis théorique et utilisant à la fois des validations perceptives et d'autres déductives.

3 Description de la formation proposée

Le dispositif de formation mis en place avec 103 étudiants a pour objectifs, entre autres[4] :

- de faire prendre conscience aux PE1 des paradigmes G1 et G2, ainsi qu'éventuellement du pseudo-paradigme dans lequel ils se situent quand ils résolvent des problèmes de géométrie,
- de raviver des connaissances et développer des compétences dans G2.

Il se décompose en plusieurs étapes :

- Etape 1 : « Le point sur les quadrilatères ». Il s'agit de rappeler le caractère inclusif des différents ensembles de quadrilatères[5], de redéfinir les objets moins bien connus[6], d'expliciter le concept de définition minimale[7] et d'attirer l'attention sur le rôle des positions et proportions prototypiques des dessins proposés[8].
- Etape 2 : « Tracer un triangle rectangle ». Il est demandé aux étudiants de tracer un triangle rectangle à la règle non graduée et au compas, d'écrire le scénario de construction correspondant à cette construction puis de donner les propriétés qui justifient que l'on a bien tracé un triangle rectangle avec ce scénario. C'est l'occasion de revoir les différentes procédures qui permettent de tracer des perpendiculaires, de travailler la rédaction de scénario de construction, mais surtout de mettre en évidence les propriétés et théorèmes exploités. Les résultats de cette activité sont analysés ci-dessous. D'autres constructions sont ensuite proposées dans le même esprit.
- Etape 3 : « ABCD est-il un carré ? ». L'item présenté précédemment est proposé aux étudiants. Ils formulent leur réponse par écrit puis un débat s'engage entre eux. Certaines caractéristiques de G1 et G2 apparaissent alors dans le débat, formulées par les étudiants eux-mêmes, une synthèse sur ce sujet est ensuite effectuée par l'enseignant.
- Etape 4 : « Tracer une droite parallèle à une droite d passant par un point A ». L'étape 2 est reprise sur un nouvel objet puis la consigne évolue. Il s'agit alors non plus d'effectuer **d'abord** une construction **puis** de repérer les propriétés étudiées, mais de choisir **d'abord** les propriétés que l'on peut utiliser **puis** de mettre en œuvre ces propriétés pour effectuer la construction demandée. Propriétés et théorèmes ne sont plus utilisés seulement pour démontrer mais pour effectuer des constructions, point de vue nouveau qui permet de leur redonner du sens. En même temps, l'aspect G1/G2 est explicité : la tâche de construction pourrait être considérée dans G1, mais le fait de s'intéresser d'une part aux objets géométriques construits (on remplace dans les scénarios de construction des expressions du type « prendre l'écartement AB, reporter cette longueur à partir de C, etc. » par « tracer le cercle de centre C et de rayon AB ») et d'autre part aux propriétés qui justifient ces constructions (validations hypothético-déductives) fait passer l'activité de G1 vers G2. Ce qui nous intéresse alors n'est plus en effet le dessin

[4] Nous ne nous intéresserons pas ici à l'autre volet de la formation, lié aux aspects didactiques de l'enseignement de la géométrie à l'école

[5] Par exemple, un carré est un rectangle particulier, qui est lui-même une parallélogramme particulier, etc.

[6] Le cerf-volant par exemple

[7] Définir un objet, ce n'est pas donner la liste de toutes ses propriétés, mais seulement une liste de propriétés nécessaires et suffisantes

[8] Un élève bien souvent ne reconnaît pas un rectangle trop allongé, ou un losange posé sur un côté (alors reconnu comme un parallélogramme).

obtenu mais les divers objets géométriques (droites, cercles et leurs intersections) qui permettent de définir l'objet construit[9]. Il s'agit donc de construction au sens de G2. D'autres constructions sont alors proposées avec cette démarche.

- Etape 5 : « Activité médiatrice ». Il s'agit d'une situation-problème issue des travaux du GreDiM[10] (Parzysz 2002). L'objectif de cette activité est entre autres d'analyser dans quel paradigme les étudiants se situent à ce stade de la formation, et d'évaluer leur lucidité par rapport à ce positionnement dans G1 ou G2. Cette situation est détaillée et analysée dans la suite de ce texte.
- Etape 6 : « Démonstrations ». Des exercices de démonstrations classiques sont alors proposés aux étudiants.

Nous ne détaillerons pas ici l'ensemble de ces étapes, mais deux d'entre elles pour lesquelles l'analyse implicative nous a été particulièrement utile. La première est l'étape « Tracer un triangle rectangle ». Celle-ci est proposée en début de formation et elle permet donc de faire un état des lieux des procédures proposées et surtout du langage utilisé spontanément par les étudiants pour décrire leur construction. Ce langage est particulièrement intéressant car il est un indice du paradigme dans lequel se situent ou peuvent se situer les étudiants.

La deuxième étape analysée est l'« Activité médiatrice », proposée au contraire en fin de formation. Elle permet entre autres d'évaluer l'efficacité de la formation du point de vue de la prise de conscience des paradigmes géométriques G1 et G2.

4 Tracer un triangle rectangle

Les étudiants ont effectué cette activité sur une feuille rendue puis codée. De nombreux éléments ont été pris en compte pour analyser les trois parties de l'activité : construction, scénario de construction, justification de ce scénario, du point de vue du fond et de la forme, notamment :

- la procédure utilisée (TP) ; 5 procédures sont envisagées
- le vocabulaire (TV) ; 12 mots ou groupes de mots synonymes sont repérés
- le scénario (TS) ; 3 cas sont envisagés, absent, incomplet ou complet
- la formulation du scénario (TFS) ; une échelle d'évaluation en 5 notes est utilisée, de « très bien » à « très incorrecte »
- la justification du scénario du point de vue de l'exactitude de ce qui est énoncé (TJE) ; ce qui est énoncé est exact, ou inexact, le cas particulier de l'énoncé de la réciproque de la propriété effectivement utilisée étant également envisagé
- la justification du scénario du point de vue de la pertinence des arguments utilisés (TJD) ; ce qui est énoncé démontre totalement, en partie ou pas du tout le scénario proposé
- la formulation de la justification (TFJ) ; la même échelle d'évaluation que pour la formulation du scénario est utilisée.

L'hypothèse de recherche qui sous-tend ces choix de variables est la suivante : le langage utilisé est un indice du paradigme dans lequel est considérée la construction (G1 ou G2) par l'étudiant, et le cas échéant un frein pour passer de G1 à G2. Les variables choisies permettent donc de décrire le fond de la réponse (procédure utilisée, scénario et justification) mais aussi la forme, par le repérage du vocabulaire et l'évaluation de la formulation du scénario et de la justification.

L'analyse implicative est effectuée avec la théorie classique et la loi binomiale, avec la version 1.4[11] de CHIC qui permet de garder trace des fréquences de chacune des modalités de variables. Le graphe implicatif fait

---

[9] Par exemple, pour construire une droite passant par un point donné A et parallèle à une droite donné d, on peut successivement considérer : deux points quelconques B et C sur d, le cercle C_1 de centre C de rayon AB, le cercle C_2 de centre A de rayon BC. Ces deux cercles ont deux points d'intersection. Nommons D celui des deux points tel que le quadrilatère ABCD soit convexe. La droite (AD) est parallèle à la droite d. D vérifie en effet $AD = BC$ et $CD = AB$. Le quadrilatère ABCD étant par ailleurs convexe, c'est un parallélogramme et ses côtés opposés, en particulier ici [AD] et [BC], sont parallèles.

[10] Groupe de Recherche en Didactique des Mathématiques de l'IUFM d'Orléans-Tours

[11] La version 3.5 de CHIC qui dessine le graphe de manière automatique est d'abord utilisée pour repérer la forme du graphe, les différents groupes, les indices pertinents, etc. La version 1.4 est ensuite utilisée pour faciliter l'interprétation en évitant d'attacher trop d'importance à des modalités de faible fréquence.

apparaître deux groupes, qui correspondent chacun à un type de procédure de construction, et que nous allons maintenant détailler.

4.1 Procédures utilisant la médiatrice

Le premier groupe de variables donne le graphe suivant :

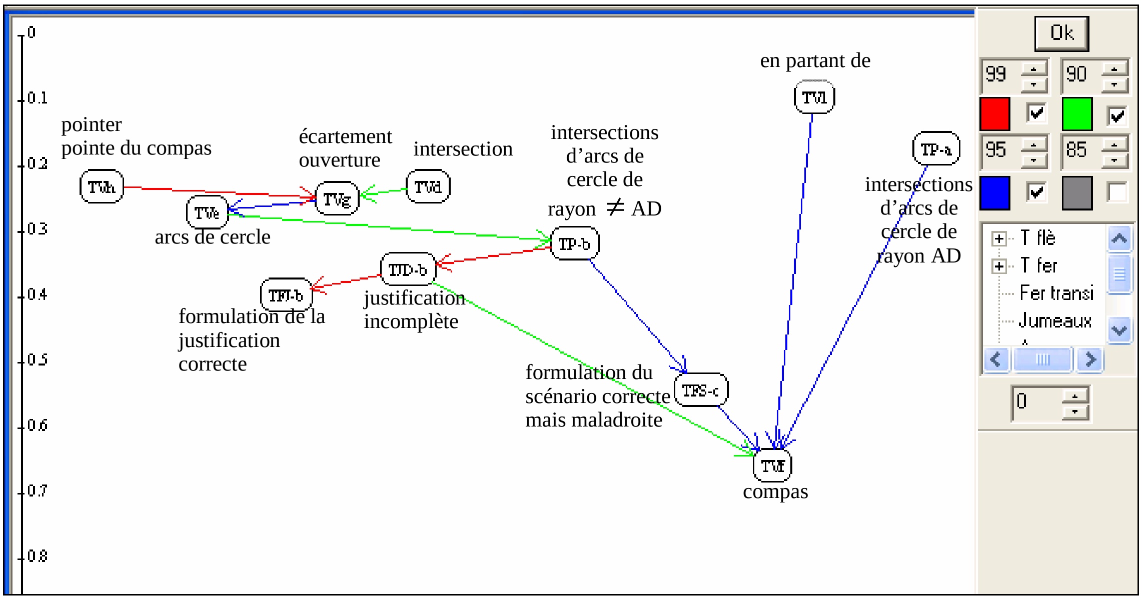

FIG. 2 – *Graphe implicatif sur le tracé de triangle rectangle, avec des procédures basées sur la médiatrice*

Il met en évidence des liens entre un vocabulaire peu géométrique, très lié au geste effectué (pointer, reporter) et aux instruments utilisés (écartement, ouverture, pointe du compas, compas) et les procédures liées au tracé d'une médiatrice à la règle et au compas, basées sur des intersections d'arcs de cercles. La formulation du scénario y est en général correcte sur le fond, mais maladroite sur la forme, du point de vue du langage utilisé. La justification de ce scénario est le plus souvent incomplète. Ces résultats corroborent d'autres obtenus par ailleurs (Jore 2006) à partir d'une étude spécifique sur des tracés de médiatrice.

Détaillons les procédures utilisées, en explicitant une construction possible dans G2, correspondant à la procédure « standard » de construction d'une médiatrice à la règle et au compas.

- Considérer deux points A et D ainsi que la droite (AD)
- Soit deux cercles sécants de centres respectifs A et D et de même rayon
- Soit d la droite passant par les intersections de ces deux cercles
- Soit un point C sur la droite d (et pas sur (AD)) et soit B le point d'intersection de d et de (AD)
- ABC est un triangle rectangle

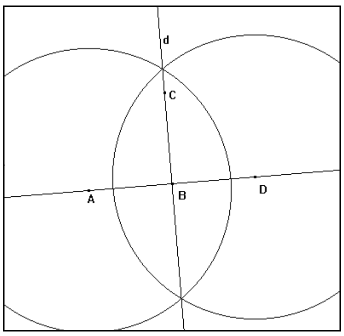

FIG. 3 –*Tracé d'un triangle rectangle ABC à la règle et au compas*

Le rayon des cercles tracés peut être égal à la distance AD (TP-a) ou différent de la distance AD (TP-b). Cette procédure est fréquemment présentée au collège à la suite du travail sur la médiatrice mais dans un langage lié à G1 et à l’action effective de tracé (tracer la droite (AD), tracer un cercle …). Par ailleurs, le plus souvent, d’une part des arcs de cercles seulement sont effectués pour alléger la figure, d’autre part les élèves, s’ils se souviennent de la méthode de tracé, ont complètement oublié la médiatrice et les propriétés qui sous-tendent cette construction. Ils ont seulement mémorisé cette procédure comme celle permettant de tracer des perpendiculaires. Leur scénario de construction peut alors être du type :

Je trace une droite d. Je prends 2 points sur cette droite que j'appelle D et E. Je prends mon compas je choisi un écartement quelconque. Je pointe le compas en D et je trace un arc de cercle de part et d'autre de la droite d, je garde le même écartement, je pointe en E et je fais un arc de cercle de part et d'autre de d. De part et d'autre de d les arcs de cercle se recoupe en F et en G. Je trace la droite passant par G et F, je l'appelle d'. Les droites d et d' se coupent en B. Je choisi un point C sur d, puis un point A sur d'. Je relie ABC.

FIG. 4 –*Scénario de construction d’un triangle rectangle*

Ce premier groupe dans le graphe implicatif rend bien compte de ce type de production. Le vocabulaire en particulier met en évidence que les étudiants s’attachent alors au geste physique à effectuer, caractéristique du paradigme G1, plutôt qu’à l’objet géométrique construit, caractéristique du paradigme G2. Ils « pointent » par exemple le compas en un point A avec un certain « écartement » BC au lieu de tracer un cercle de centre A et de rayon BC. Ce langage de l’action lié à l’utilisation de l’instrument ne leur permet pas de prendre en compte les objets géométriques sous-jacents (droites, cercles et points d’intersection), et ne leur permet donc pas ultérieurement de passer de G1 à G2. Le lien $\mathrm{TP-b} \rightarrow \mathrm{TJD-c}$ du graphe implicatif exprime que les étudiants qui utilisent la procédure standard ne donnent pas une justification complète. Il met ainsi en évidence la difficulté, voire l’impossibilité pour certains, à travailler correctement dans G2. Or les procédures de ce groupe sont les procédures automatisées au collège pour tracer une médiatrice, voire des perpendiculaires. On peut donc penser que cette automatisation des gestes à effectuer pour effectuer la construction enferme les élèves dans le paradigme G1. Ils n’ont pas conscience des objets géométriques utilisés, et ils n’ont donc aucun moyen de fonctionner dans le paradigme G2.

4.2 Procédures utilisant un triangle rectangle inscrit dans un cercle

Le second groupe de variables est organisé autour de la procédure basée sur le théorème : tout triangle inscrit dans un cercle dont le diamètre est un des côtés du triangle est un triangle rectangle. Il suffit alors de tracer un cercle, un de ses diamètres [AB], puis un point C n’importe où sur le cercle. Ce graphe implicatif met tout d’abord en évidence le langage alors utilisé. Le vocabulaire géométrique cercle, centre, rayon apparaît cette fois à la place du langage lié aux gestes ou aux instruments : il est en effet utile ici en particulier de tracer le cercle en entier. De ce fait, la formulation du scénario est correcte, voire parfaite. Par ailleurs, la justification est généralement complète et correcte sur le fond : pour appliquer cette procédure, qui n’a généralement pas été automatisée au collège, il faut penser à ce théorème et le maîtriser suffisamment pour en déduire une technique de construction. Sur la forme, cette justification est cependant parfois maladroite car l’énoncé du théorème est encore difficile pour certains.

Les étudiants scientifiques sont bien typiques de ce groupe : c’est la variable supplémentaire la plus typique du chemin $\mathrm{TFS-a} \rightarrow \mathrm{TP-c}$ avec un risque de 0.05 et du chemin $\mathrm{TJD-a} \rightarrow \mathrm{TP-c}$ avec un risque de 0.06.

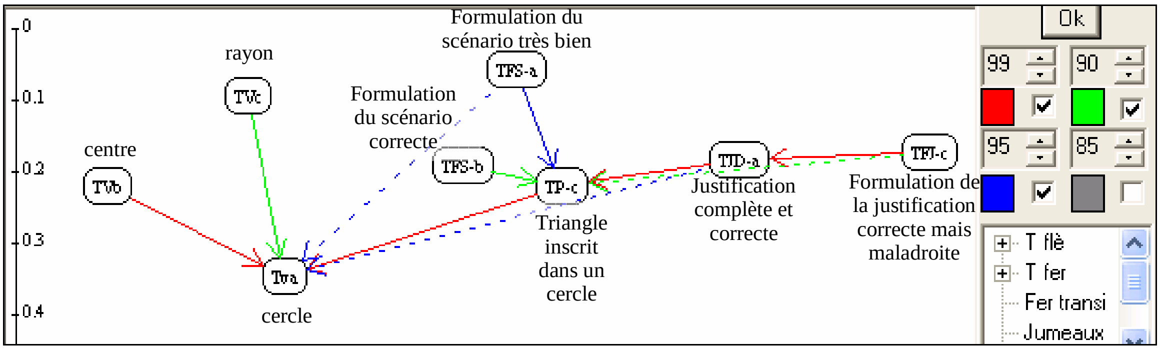

FIG. 5 – *Graphe implicatif sur le tracé de triangle rectangle, avec des procédures basées sur le triangle rectangle inscrit dans un cercle.*

Ces deux groupes dans le graphe implicatif mettent en évidence que l'automatisation de procédures de construction ne favorise ni leur formulation, ni leur justification. Cela permet de faire des propositions du point de vue didactique dans les classes : il semble ainsi souhaitable d'une part de ne pas automatiser de procédures de construction indépendamment de leur formulation en terme d'objets géométriques, d'autre part d'insister sur le langage utilisé, qui doit alors décrire l'objet géométrique et les propriétés mises en œuvre plutôt que l'action effectuée et les instruments utilisés. Le passage de G1 à G2 en sera facilité le moment venu.

5 La situation médiatrice

Analysons maintenant une des dernières activités proposées aux étudiants en fin de formation en géométrie plane.

5.1 Enoncé et caractéristiques de la situation

L'énoncé proposé aux 103 étudiants est :

Tracer une droite d. On appelle O un point de cette droite. Tracer le cercle C_1 de centre O et de rayon 2 cm. Ce cercle coupe la droite d en deux points A et B. Tracer le cercle C_2 de centre O et de rayon 4 cm. Tracer le cercle C_3 de centre A et de rayon 4,5 cm. Ce cercle coupe le cercle en deux points C et D. Quel(s) moyen(s) pouvez-vous mettre en œuvre pour savoir si la droite (CD) est, ou non, la médiatrice du segment [AB] ? Conclure.

Le dessin obtenu est alors (attention, l'échelle n'est pas respectée) :

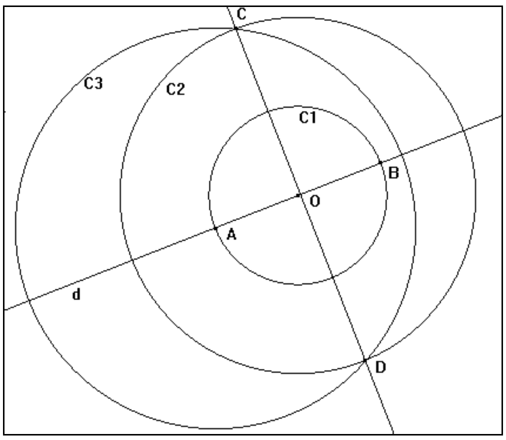

FIG. 6 – *La situation médiatrice*

Quand les étudiants ont terminé leur travail, il leur est demandé d'indiquer sur leur feuille s'ils pensent avoir travaillé dans G1 ou dans G2.
Détaillons quelques caractéristiques de cette situation :

- la forme de la question, « quel(s) moyen(s) pouvez-vous mettre en œuvre pour savoir … », a pour objectif de laisser un peu de marge de manœuvre aux étudiants et en particulier de leur permettre a priori d'effectuer une démarche dans G1 ou dans G2. De ce point de vue, la question est ambiguë : rien n'indique s'il faut se situer dans G1 ou dans G2. En particulier, il n'est pas explicitement demandé de démontrer, ce qui inciterait a priori à se situer dans G2, compte tenu du contrat didactique en cours avec ces étudiants.
- cette situation est fondée sur l'utilisation d'un triplet pythagoricien (x, y, z), ou plutôt pseudo-pythagoricien, c'est-à-dire tel que $x^2 + y^2 = z^2 \pm 1$. Dans le cas présent, on a : $4^2 + 8^2 = 80 = 9^2 - 1$; les valeurs 4, 8 et 9 sont ensuite divisées par 2 pour obtenir un dessin de format convenable avec l'unité centimètre. Ces valeurs numériques sont évidemment choisies pour que perceptivement, c'est-à-dire si on se situe dans G1, on puisse considérer que (CD) est effectivement la médiatrice de [AB], tandis que dans G2, une démonstration permet de conclure que ce n'est pas le cas : la droite (CD) est bien perpendiculaire à [AB], mais ne passe pas par O.
- la formulation n'incite pas à effectuer complètement la démonstration, mais à indiquer une méthode, sans nécessairement la mettre en œuvre. Cela doit permettre aux étudiants qui ne sont pas encore très à l'aise dans la rédaction de démonstrations, compétence qui n'a pas été explicitement travaillée à ce stade du dispositif de formation, de pouvoir néanmoins s'investir dans la tâche en se situant dans G2.
- par ailleurs, cette formulation incite à proposer plusieurs méthodes, et il s'agit pour nous de voir dans quel(s) paradigme(s) elles se situent et en particulier d'étudier si les paradigmes G1 et G2 vont être ou non simultanément utilisés.

Après un temps de travail individuel, la phase de mise en commun doit permettre :

- à chaque étudiant de repérer s'il a travaillé dans G1, ou dans G2, ou dans un pseudo-paradigme qui relève des deux à la fois, en repérant la nature des hypothèses utilisées et des validations effectuées
- d'élaborer une démonstration complète de la réponse correcte, dans G2

Dans G2, une solution peut consister en la démonstration suivante :

$A \in C_1$ donc : $OA = 2\text{cm}$
$A \in C_2$ donc : $OC = 4\text{cm}$
$C \in C_3$ donc : $AC = 4,5\text{cm}$.
Le triangle AOC est un triangle de côtés 2 cm, 4 cm et 4,5 cm. Or : $2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$ et $4,5^2 = 20,25$. Il suffit d'appliquer la contraposée du théorème de Pythagore pour conclure qu'il n'est pas droit. Le triangle n'est donc pas rectangle, (AO) n'est pas perpendiculaire à (OC).
Or O est le milieu de [AB], O est donc sur la médiatrice de [AB], qui est perpendiculaire à [AB], donc C n'est pas sur la médiatrice de [AB], donc (CD) n'est pas la médiatrice de [AB].

Cette démonstration fait intervenir la contraposée du théorème de Pythagore et la définition de la médiatrice comme droite perpendiculaire au segment passant par son milieu, deux éléments dont j'ai pu montrer ailleurs qu'ils sont disponibles chez les étudiants (Jore 2006).
Cette démonstration est donc a priori accessible aux étudiants. D'autres fins de démonstration sont par ailleurs possibles. Par exemple :

De même que l'on montre que le triangle COA n'est pas rectangle, on obtient que le triangle DOA ne l'est pas non plus.
Or on a : $\widehat{COA} = \widehat{DOA}$, donc les points D, O et C ne sont pas alignés.
Donc le point O n'est pas sur la droite (CD).
Or O est le milieu de [AB], O est donc sur la médiatrice de [AB].
Donc (CD) n'est pas la médiatrice de [AB].

Enfin, rappelons que dans la phase de travail individuel, une démonstration complète n'était pas attendue.

5.2 Les variables de l'analyse et les questions didactiques sous-jacentes

Les étudiants ont à nouveau effectué cette activité individuellement sur une feuille rendue puis codée. Les éléments cette fois pris en compte ont été les suivants :

- Le nombre de moyens proposés (MM) ; 0, 1 ou plusieurs moyens sont envisagés.
- Les caractéristiques des preuves ou démonstrations proposées (MP) ; correcte, incomplète ou incorrecte dans G1, correcte, incomplète ou incorrecte dans G2, ainsi qu'une procédure particulière consistant à montrer que (AB) est la médiatrice de [CD] sont les modalités envisagées.
- La nature des moyens proposés du point de vue des paradigmes géométriques G1/G2 (MA) ; les arguments peuvent être entièrement dans G1, ou dans G2, ou à la fois dans G1 et G2.
- Ce que pensent les étudiants de leur travail, du point de vue G1/G2 ; ils peuvent penser se situer dans G1, ou dans G2, ou dans G1 et G2.

Ces différentes variables doivent permettre de faire émerger le niveau de compétence des étudiants en fin de formation, ainsi que leur rapport aux paradigmes G1 et G2 : fonctionnent-ils encore majoritairement dans G1, ou une évolution vers G2 est-elle amorcée ? Et surtout, une question fondamentale se pose, en lien avec les objectifs de l'ingénierie de formation proposée : les étudiants ont-ils pris conscience des l'existence des paradigmes géométriques G1 et G2 et de celui dans lequel ils travaillent dans la résolution du problème « médiatrice » ?

5.3 Les moyens effectivement mis en œuvre

La plupart des étudiants n'ont pas seulement proposé des moyens à mettre en œuvre, mais en ont effectivement mis au moins un en œuvre. Etudions alors plus précisément pour commencer chaque production d'étudiant afin de préciser sa nature. Il s'agit de repérer si l'étudiant propose une démonstration dans G2 ou bien une preuve dans G1. Nous renvoyons le lecteur à (Balacheff 1982, p 263) et (Jore 2006, p 430) pour une explicitation de ces deux termes.
On obtient les résultats suivants pour les moyens effectivement mis en œuvre :

Modalité	Effectif	%
MDa : démonstration correcte dans G2	7	6
MDb : démonstration incomplète dans G2	12	11
MDc : (AB) est la médiatrice de [CD]	4	4
MDd : démonstration incorrecte dans G2	21	19
MDe : preuve correcte dans G1	40	37
MDf : preuve incomplète dans G1	4	4
MDg : preuve incorrecte dans G1	4	4
MDh : pas de preuve ni de démonstration	16	15
Total :	108	100

40 % des propositions sont des démonstrations dans G2,
6 % seulement sont correctes

45 % des propositions sont des preuves dans G1
31% sont correctes

TAB 2 – *Tris croisés sur le nombre et la nature des moyens proposés .*

Ce tableau met en évidence qu'il y a à peu près autant de propositions qui se situent dans G2 (40 %) que dans G1 (45 %), mais avec beaucoup moins de réussite : 16 % de celles qui essaient de mettre en œuvre une démonstration dans G2 sont correctes, tandis que 83 % de celles qui mettent en œuvre une preuve dans G1 le sont. Le degré de difficulté n'est évidemment pas le même : la preuve peut être effectuée par une simple application de la définition de la médiatrice par milieu et perpendiculaire, il suffit de vérifier, nous l'avons dit, visuellement ou à l'aide l'équerre, que la droite (CD) est perpendiculaire à (AB) puis qu'elle passe par O, tandis que la démonstration nécessite entre autres d'utiliser la contraposée du théorème de Pythagore. Or, ici, il n'est question d'aucun triangle mais seulement de cercles, ce qui rend le théorème difficile à mobiliser. Par ailleurs, il s'agit d'utiliser la contraposée du théorème et non le théorème lui-même, ce qui est plus délicat. Les étudiants sont habitués à mobiliser le théorème pour calculer une longueur manquante dans un triangle rectangle, mais un peu moins à utiliser la contraposée, surtout pour vérifier non pas qu'un triangle n'est pas rectangle, mais que deux droites ne sont pas perpendiculaires. L'association est en effet éventuellement effectuée entre « triangle rectangle » et « théorème de Pythagore » mais pas entre « droites perpendiculaires » et « théorème de

Pythagore ». Une autre difficulté vient s'ajouter aux précédentes : la définition de la médiatrice nous amène à chercher si (CD) est perpendiculaire à [AB], mais il faut en fait étudier d'abord si (OC) est perpendiculaire à (OA) !

Le nombre important d'essais de démonstrations montre que les étudiants ont bien compris la règle du contrat didactique à ce niveau : il s'agit de travailler de préférence dans G2. Mais leurs connaissances et compétences ne leur permettent pas d'élaborer entièrement une démonstration correcte.

5.4 Analyse implicative sur l'ensemble des variables

L'analyse implicative permet d'étudier simultanément toutes les variables. Elle est à nouveau effectuée avec la théorie classique et la loi binomiale, compte tenu de l'effectif relativement restreint. Le graphe implicatif obtenu est le suivant :

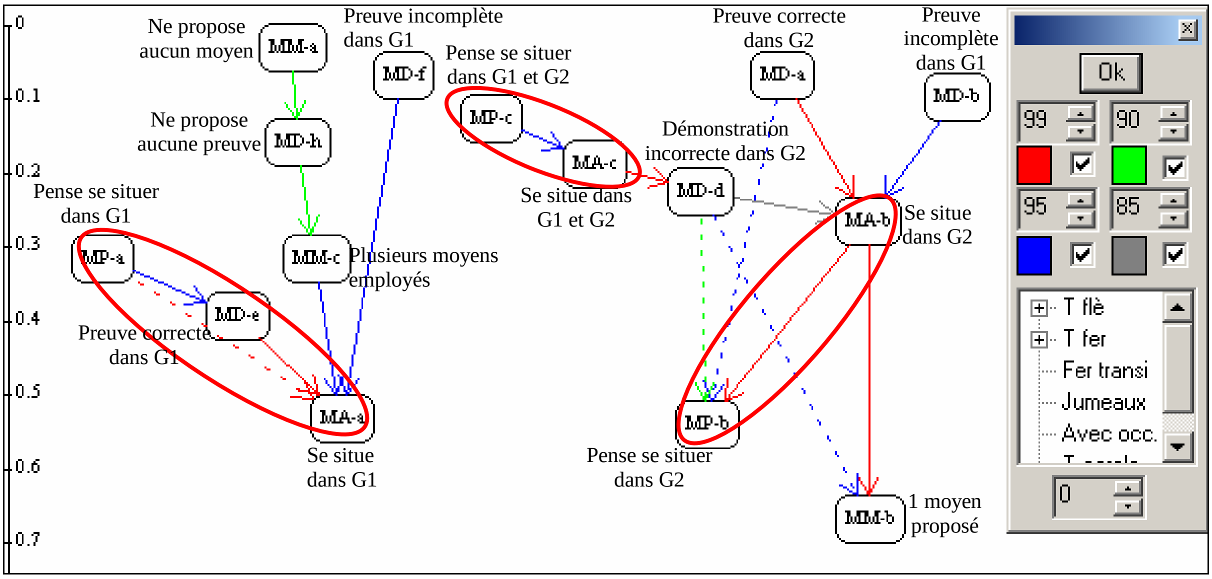

FIG. 7 – *Graphe implicatif sur la situation médiatrice*

5.4.1 Lien entre le nombre de moyens proposés et les paradigmes géométriques

Deux implications expriment le lien entre le nombre de moyens proposés et les paradigmes géométriques :

$MM-c \rightarrow MA-a$: lorsque plusieurs moyens sont proposés, ce sont des moyens dans G1

$MA-b \rightarrow MM-b$: lorsque les arguments relèvent de G2, il n'y en a qu'un

Plusieurs éléments permettent d'interpréter ces relations.

Pour ceux qui se situent dans G2, une référence au contrat didactique dans la classe de mathématiques peut être utile : il est habituel de repérer que plusieurs démonstrations d'une même propriété sont possibles, mais qu'une seule suffit ; quand on a effectué une démonstration, on sait que la propriété étudiée est vraie, il n'est pas nécessaire d'en effectuer une seconde. En outre, dans le cas présent, il est déjà difficile d'aboutir à une démonstration correcte, il est peu probable que les étudiants puissent en effectuer deux différentes, ils n'en ont donc ni l'idée, ni les moyens. Enfin, la consigne « conclure » invite finalement à répondre à la question « la droite (CD) est-elle ou non la médiatrice du segment [AB] ? » et donc à mettre en œuvre ces moyens plutôt qu'à chercher une liste de moyens possibles.

Ainsi, pour proposer plusieurs moyens, il faut se situer dans G1, où effectivement plusieurs démarches sont possibles. On peut par exemple, vérifier la perpendicularité de (AB) et (CD) à l'équerre puis que O est sur (CD), ou encore que C et D sont à égale distance de A et de B avec un compas. On peut également tracer la médiatrice de [AB] (à la règle non graduée et au compas ou à la règle graduée et à l'équerre) puis s'assurer perceptivement qu'elle se superpose à (CD).

Par ailleurs, l'analyse du tri à plat précédent a permis de mettre en évidence le faible taux de démonstrations correctes dans G2. On retrouve les démonstrations incorrectes dans l'analyse implicative par le lien :

$\mathrm{MA-c} \to \mathrm{MD-d}$: lorsque les arguments relèvent de G1 et de G2, il y a présence d'une démonstration incorrecte dans G2.

L'analyse implicative permet ainsi de caractériser les démonstrations incorrectes par le fait que celles-ci se situent à la fois dans le paradigme G2 et dans le paradigme G1, ou plus exactement dans un pseudo-paradigme qui tient à la fois de G1 et de G2 ; il ne s'agit donc pas en général de l'utilisation d'un théorème erroné mais de utilisation incorrecte d'un théorème exact : les hypothèses ne sont pas des informations données dans l'énoncé ou obtenues à partir des informations initiales par un raisonnement hypothético-déductif (ce qui relèverait effectivement de G2), mais des informations lues sur le dessin (ce qui relève alors de G1). Ceci permet de confirmer l'importance de la prise de conscience par les étudiants des paradigmes G1 et G2. En effet, si un travail reste à faire du point de vue de la connaissance des théorèmes, un travail encore plus important est à effectuer avec certains étudiants sur la nature des hypothèses utilisées dans l'application de ces théorèmes.

5.4.2 Analyse de la lucidité des étudiants du point de vue des paradigmes géométriques G1/G2

Le graphe implicatif met par ailleurs en évidence la lucidité des étudiants, avec les liens suivants :

$\mathrm{MP-a} \to \mathrm{MA-a}$ (indice d'implication : 1) : quand l'étudiant pense se situer dans G1, c'est le cas[12].

$\mathrm{MP-c} \to \mathrm{MA-c}$ (indice d'implication : 0.98) : quand l'étudiant pense se situer dans G1 et dans G2, c'est également le cas.

$\mathrm{MA-b} \to \mathrm{MP-b}$ (indice d'implication : 1) : quand l'étudiant se situe dans G2, il le sait.

Rappelons que dans l'analyse implicative, les liens se font toujours d'une variable vers une autre d'effectif supérieur ou égal. C'est l'effectif de ceux qui ne sont pas lucides en pensant travailler dans G2 seulement alors que ce n'est pas le cas qui créent ainsi le sens de ces liens : l'effectif de ceux qui pensent se situer dans G1 ou dans G1 et G2 est ainsi inférieur à la réalité tandis que celui de ceux qui se situent effectivement dans G2 est inférieur à celui de ceux qui pensent se situer dans G2.

Il est possible d'affiner cette analyse de la lucidité en étudiant les liens entre les moyens effectivement proposés par les étudiants et ce qu'ils pensent de leur production du point de vue G1/G2.

Si on s'intéresse à ceux qui pensent se situer dans G2, on obtient les liens $\mathrm{MD-a} \to \mathrm{MP-b}$ (indice d'implication 0.96) et $\mathrm{MD-d} \to \mathrm{MP-b}$ (indice d'implication 0.92) : quand l'étudiant présente une preuve correcte ou incorrecte dans G2, il pense effectivement se situer dans G2. Une autre question aurait été intéressante : « pensez-vous que votre démonstration est exacte ? ». Celle-ci n'a pas été posée et on ne peut déterminer la lucidité des étudiants de ce point de vue, mais ces liens montrent que la forme de la démonstration permet aux étudiants de repérer un travail relevant de G2. Par contre, il n'y a pas de lien fort $\mathrm{MD-b} \to \mathrm{MP-b}$ (indice d'implication seulement 0.69) : certains étudiants qui effectuent une preuve incomplète dans G2 ont finalement conscience de ne pas vraiment travailler dans G2. Ces démonstrations considérées comme incomplètes présentent des bribes de G2, mais pas un raisonnement abouti et une partie de ces étudiants s'en rend compte, ce qui explique cette quasi absence d'implication.

Si on s'intéresse à ceux qui pensent se situer dans G1, on obtient le lien $\mathrm{MP-a} \to \mathrm{MD-e}$ (indice d'implication 0.97) : quand on pense se situer dans G1, non seulement effectivement on a travaillé dans G1, mais en effectuant une preuve correcte ! Rappelons qu'il est relativement facile, comme nous l'avons déjà expliqué, d'obtenir une preuve correcte dans G1, alors qu'il est plus difficile d'obtenir une démonstration correcte dans G2.

L'analyse implicative permet ainsi de monter que si les performances des étudiants du point de vue de la démonstration sont encore très en deçà des résultats attendus, un objectif de la formation a en grande partie été atteint : une majorité d'étudiants est globalement consciente du paradigme géométrique dans lequel elle travaille.

[12] Il faudrait à dire « c'est en général le cas », dans la mesure où il s'agit bien sûr de quasi-implication statistique et non d'implication formelle. J'évite néanmoins d'ajouter « en général » partout pour alléger le discours, d'autant plus qu'ici, bon nombre d'implications ont des indices relativement élevés.

6 Conclusion

L’analyse implicative nous a permis dans ce travail de mettre en relation le langage et les procédures de tracé utilisées dans la construction d’un triangle rectangle par des futurs professeurs des écoles en formation initiale. Une des conclusions importante est que l’automatisation de procédures de construction est un frein à leur formulation et à leur justification. Les étudiants sont alors amenés à exprimer les constructions dans un langage très lié aux gestes et aux instruments, au lieu d’utiliser le langage géométrique. Ce défaut de langage, lié à une difficulté à justifier la procédure utilisée, indique que les étudiants sont alors enfermés dans le paradigme géométrique G1, incapables d’expliciter les objets géométriques utilisés, leurs relations et leurs propriétés, éléments essentiels du paradigme G2. Les conséquences d’ordre didactique sont immédiates : un travail spécifique sur le langage doit être effectué avec les élèves dans la description des constructions dans G1 pour leur permettre ultérieurement de travailler dans G2.

Par ailleurs, le travail autour de la situation problème « médiatrice » a mis en évidence les insuffisances de la formation du point de vue de la mise en œuvre de démonstrations correctes, mais aussi une relative efficacité de la formation proposée du point de vue de la lucidité des étudiants autour des paradigmes G1 et G2. A défaut d’être capables de résoudre le problème correctement dans G2, les étudiants sont, pour la plupart au moins, capables d’identifier le paradigme géométrique dans lequel ils se situent. Cette évolution positive à court terme mériterait bien entendu d’être réinterrogée à plus long terme. Elle justifie en tous cas de poursuivre un travail dans cette voie.

Références

Gras R. (1996), L'implication statistique, nouvelle méthode exploratoire de données. Applications à la didactique. Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble

Houdement C. et Kuzniak A. (1999), Géométrie et paradigmes géométriques. Petit x. n°51. p 5-21.

Houdement C. et Kuzniak A. (2000), Formation des maîtres et paradigmes géométriques. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 20. n°1. p 89-116.

Jore F (2006), Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnement papier-crayon et informatique, Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Parzysz B. (2002), Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1, Actes du 28ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres. Tours. Mai 2001. p.99-110.

Summary

In a research about the geometrical paradigms G1 and G2, a device of formation was set up with the French preservice elementary schoolteachers. This paper shows how the implicative analysis allows to study links between the procedures of constructions with ruler and compasses and the language used to describe the corresponding scenarios of constructions. It is the occasion to draw up the balance sheet on certain skills of the students in the beginning of training. It also allows to analyze the lucidity of the students from the point of view of their relationship in paradigms G1 and G2. It is then the occasion to estimate the efficiency of the training.