

¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?

Lidia Ortega Silva*, Ismenia Guzmán Retamal**, Arturo Mena Lorca***

* Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Naturales, Matemáticas y del Medio Ambiente
Universidad Tecnológica Metropolitana. Chile
lortega@omega.utem.cl

**Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias Básicas y Matemáticas
Universidad Católica de Valparaíso. Chile
iguzmanr@ucv.cl

***Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias Básicas y Matemáticas
Universidad Católica de Valparaíso. Chile
arturo.mena@ucv.cl

Resumen. Frente a la baja calidad del aprendizaje de los estudiantes de cálculo en la Universidad, detectada mediante cuestionarios sobre los conocimientos de conceptos básicos en matemáticas, surgió la preocupación por saber cómo estaban enseñando los profesores estos contenidos. En el seminario de Didáctica Matemática del Instituto de Matemáticas de la Universidad Católica de Valparaíso, IMA, se elaboró una encuesta dirigida a profesores de matemáticas de una institución. En este trabajo se presenta el tratamiento con CHIC de los resultados obtenidos sobre el tema de derivadas, considerando siete aspectos: el concepto de derivada, cálculo de derivada, interpretación de la derivada, teoremas claves, máximos y mínimos, gráfico de curvas y otros problemas. Para cada aspecto se plantearon siete preguntas: grado de dificultad, grado de importancia, distribución del tiempo, uso de ejemplos ilustrativos, uso de ejercicios y problemas, tipo de presentación de la materia y metodología en clases. Con el tratamiento de datos se logró determinar un perfil del profesor de cálculo, junto con la Tipicidad y la Contribución a su práctica docente en la sala de clases.

1 Introducción

Investigaciones exploratorias preliminares que hemos realizado en el marco del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática, del Instituto de Matemáticas de la Universidad Católica de Valparaíso, que congrega a investigadores de varias instituciones de educación superior, han dado evidencias empíricas sobre la debilidad en los aprendizajes de los estudiantes sobre conceptos matemáticos claves en una institución universitaria elegida para el estudio. El Seminario se puso como tarea estudiar la conceptualización que lograban los estudiantes de los cursos de Cálculo. Este estudio se hizo en base a varias encuestas sobre conceptos matemáticos tales como: función, espacio vectorial, límite de una función, supremo, ínfimo, máximo, mínimo, derivada de una función. Los resultados mostraron confusiones de parte de los alumnos. Por ejemplo, confundían la imagen de una función con la ordenada en el origen, asociaban la función con una ecuación, asociaban el límite de una función con el valor de la función en el punto, o bien como el máximo valor de la función. El Seminario de Didáctica aún no termina esta investigación¹, pero ante los primeros resultados obtenidos surgió la necesidad de buscar explicaciones a esta situación y nuevas orientaciones que permitan favorecer los aprendizajes. La presente investigación se focaliza en los profesores que imparten o han impartido diferentes cursos de la línea de Cálculo en los primeros años universitarios en la institución escogida, y su metodología de aula.

2 Problemática

Nuestra meta es múltiple: ¿cómo mejorar el quehacer docente de los profesores de Cálculo?, ¿qué elementos podemos dar para lograr este cambio?, ¿cuál va a ser el espacio que tendrán en el tratamiento de las materias, los registros de representación –algebraico-simbólico, gráfico, lenguaje natural–?

La didáctica del Cálculo diferencial, ha podido determinar que la enseñanza tradicional, basada en clases expositivas y con escasa intervención de los alumnos, no favorece el aprendizaje de estos contenidos matemáticos. En el Seminario de Didáctica nos hemos propuesto como objetivo el romper este esquema.

¹ Hay, en la actualidad, un proceso importante de revisión y reforma en la Enseñanza Media en el país, y, por otra parte, la celebrada afluencia mayor de los quintiles socioeconómicamente más bajos a la educación superior está produciendo un impacto que deberá ser estudiado

¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?

Otras preguntas que surgen, para enriquecer la problemática, son: ¿el tipo de práctica docente, en el tratamiento de un tema, se mantiene en los otros temas?, ¿se pueden agrupar estos profesores de acuerdo a sus prácticas docentes?, ¿qué conclusiones se pueden colegir a partir de un tipo de práctica docente en un tema?

3 Marco teórico

Nos situamos en un marco didáctico que enfatice el aprendizaje a nivel universitario. Los ecos del cambio en las enseñanzas Básica y Media en Chile han llegado a la Educación Superior, pero no se sabe cuán al tanto están los profesores de estos cambios y cuál es el énfasis que ellos ponen en el aprendizaje de los estudiantes, de modo que estos adquieran las competencias pertinentes –y no se trate solo de centrarse en el contenido y de ‘pasar la materia’: el profesor debería diferenciar el ‘tiempo didáctico de enseñanza’ y el ‘tiempo didáctico del alumno para el aprendizaje’–.

En el aspecto cognitivo del aprendizaje, es necesario considerar el uso de varios registros de representación semiótica: la comprensión, según Raymond Duval, necesariamente necesita la articulación de al menos dos de estos registros.

4 Metodología

La consulta se realizó a través de un cuestionario confeccionado en el Seminario de Didáctica. Este Seminario está integrado por una decena de profesores con amplia experiencia docente, entre los que se cuentan doctores en Matemáticas, doctores en Didáctica de las Matemáticas, magísteres en Matemáticas, alumnos del programa de Magíster en Didáctica Matemática, Coordinadores de asignaturas de matemáticas y autoridades académicas de la institución. La opinión técnica de este grupo de profesores permitió elegir para la consulta el tema de Cálculo, pues involucraba los conceptos preguntados a los alumnos. Para determinar las unidades de materias se consideró el programa oficial que tiene esta asignatura y que es común a instituciones universitarias del país. El desglose de estos contenidos en los temas que aparecen en el cuestionario sirvió para estructurar la primera columna en dicho documento. Es así como para la Unidad de Derivadas se consideraron los temas: Concepto de derivada, Cálculo de derivadas, Interpretación de la Derivada, Teoremas claves en el tema, Máximos y mínimos, Gráfico de Curvas y Problemas de aplicación. Las preguntas del cuestionario surgieron al preguntarse sobre los factores que inciden en la práctica docente. (Cf. Anexo).

La muestra estuvo compuesta por todos los profesores de matemáticas de la institución elegida, por lo tanto coincide con el espacio muestral.

Buscaremos explicaciones para las interrogantes señaladas en la Problemática, mediante el tratamiento y análisis de la información obtenida a través del cuestionario. Para ello utilizamos el software CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive), ya que este programa, además de entregar información estadística clásica, nos permite hacer un análisis clasificatorio de las variables consideradas.

5 Análisis a priori del cuestionario.

En la siguiente tabla se muestran las respuestas esperadas de los profesores encuestados. El número indicado en las celdas corresponde a una alternativa indicada en el cuestionario y que se explica a continuación.

Tópicos		Pregunta1	Pregunta2	Pregunta3	Pregunta4
		Gr. de dificultad del tema	Grado de Importancia	Distribución Tiempo	Ejemplos Ilustrativos
Derivadas	Concepto	1	2	2	3
	Cálculo de Derivadas	1	2	2	3
	Interpretación de la Derivada	1	2	2	3
	Teoremas Claves	1	2	2	3
	Máximos y Mínimos	1	2	2	3
	Gráfico de Curvas	1	2	2	3
	Otros Problemas de aplicación	1	2	2	3

Tópicos		Pregunta 5	Pregunta 6	Pregunta 7
		Ejercicios y Problemas	Tipo de Presentación de la Materia	Metodología Usada en Clases
Derivadas	Concepto	3	3	1
	Cálculo de Derivadas	3	3	1
	Interpretación de la Derivada	3	3	1
	Teoremas Claves	3	3	1
	Máximos y Mínimos	3	3	1
	Gráfico de Curvas	3	3	1
	Otros Problemas de aplicación	3	3	1

TAB. 1- Las respuestas esperadas en el cuestionario aplicado

En la pregunta 1: Sobre el grado de dificultad del tema

Se espera que se elija la alternativa 1: el profesor le asigna alguna dificultad, puesto que no es de inmediata aceptación por los alumnos.

En la pregunta 2: Sobre el grado de importancia del tema

Se espera que la alternativa 2 sea la elegida: el profesor le asigna bastante importancia, pues la institución lo hace, por considerarlo herramienta matemática básica.

En la pregunta 3: Sobre el tiempo dedicado para enseñar el tema

Se espera que la alternativa 2 sea la elegida: el profesor utiliza el tiempo estipulado en el programa de estudio. La pregunta procura determinar si el tiempo establecido institucionalmente es el adecuado.

En la pregunta 4: Sobre el uso de ejemplos ilustrativos

Se espera que se elija la alternativa 3: el profesor usa dos o más ejemplos ilustrativos por concepto, pues estima que los alumnos aprenden mejor si se ilustran los conceptos matemáticos con ejemplos pertinentes.

En la pregunta 5: Sobre la selección de Ejercicios y Problemas

Se espera que se elija la alternativa 3: el profesor selecciona ejercicios y problemas abiertos en distintos contextos y en los cuales la demostración es relevante. De esta manera muestra originalidad al tratar los temas seleccionando ejercicios y problemas distintos de los de las guías institucionales.

En la pregunta 6: Sobre el Tipo de presentación de la materia

Se espera que la alternativa 3 sea elegida: el profesor combina adecuadamente lo algebraico y lo gráfico para enseñar los temas. De esta manera utiliza el registro algebraico-simbólico y lo complementa con el registro gráfico en beneficio del concepto que va a enseñar.

En la pregunta 7: Sobre la Metodología usada en clases

Se espera que la alternativa 1 sea elegida: el profesor privilegia la actividad de los alumnos.

Para propósitos de esta investigación, este cuestionario, respondido de la manera descrita o muy similar a ella, va a representar el perfil del “buen profesor”; llamaremos “profesores del mínimo esfuerzo” a los que están más alejados de este perfil.

El significado de las respuestas de los profesores será analizado con ellos mismos en una segunda etapa de la investigación. Por otra parte, varios profesores no respondieron algunas de las preguntas, ya sea porque no las entendieron o bien por no saber qué contestar; esta situación será motivo de entrevistas posteriores. (El software CHIC permite identificar a esos profesores).

¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?

6 Experimentación

Para el tratamiento de los datos obtenidos por la aplicación del cuestionario a los profesores de la institución elegida, fue necesario hacer una codificación de los individuos y variables consideradas en la investigación, a fin de poder utilizar el software CHIC.

Los individuos eran 32 profesores y se codificaron: **E1, E2,, E32.**

Las variables eran las respuestas de los profesores a las preguntas formuladas sobre cada tema de la unidad de Derivadas, de acuerdo a la pauta que se les entregó y se codificaron de la siguiente manera: se consideraron cuatro caracteres, el primer carácter era **D** por la unidad temática de Derivadas, el segundo carácter se refería a un tema de la unidad de Derivadas y se codificó de la siguiente manera:

C para el concepto de derivada

D para el cálculo de derivadas

I para interpretación de la derivada

T para teoremas claves

M para máximos y mínimos

G para gráfico de curvas

P para otros problemas de aplicación

El tercer carácter era un número que variaba de 0 a 4, de acuerdo a la pauta, e indicaba el grado de respuesta del profesor frente a los siguientes aspectos:

D sobre el grado de dificultad del tema

I sobre el grado de importancia del tema

T sobre el tiempo dedicado al tema

E sobre el uso de ejemplos ilustrativos

P sobre la selección de Ejercicios y Problemas

Pm sobre el tipo de presentación de la materia

M sobre la metodología usada en clases.

Usando estas codificaciones para los individuos y las variables se construyeron matrices excel y en formato csv.

Debido al gran número de variables a considerar, 245 en total, se optó por trabajar cada tema en forma separada, considerando 28 variables en cada caso. Debido a la restricción en el número de páginas del presente trabajo, sólo se presentan en este trabajo el análisis de los temas: Concepto de derivada, Cálculo de derivadas, Interpretación de la derivada y Gráfico de curvas.

7 Análisis sobre las opiniones vertidas por los profesores respecto al *Concepto de Derivada*

A continuación se analizan las respuestas entregadas por los profesores sobre el tema *Concepto de Derivada*. Para ello se han considerado el o los dos mayores porcentajes obtenidos.

7.1 Análisis por pregunta

Con respecto a la pregunta “*El grado de dificultad del tema, para enseñarlo*”, se consideraron las alternativas siguientes: 0: Sin dificultad, 1: Alguna dificultad, 2: Bastante dificultad, 3: Mucha dificultad, 4: No contesta. Un 34% lo considera con alguna dificultad (11/32) y un 34% lo considera con bastante dificultad (11/32).

Con respecto a la pregunta “*El grado de importancia que le asigna el profesor*”, se consideraron las alternativas siguientes: 0: Sin importancia, 1: Alguna importancia, 2: Bastante importancia, 3: Mucha importancia, 4: No contesta. Un 47% considera de alguna importancia el tema (15/32) y un 44% considera de bastante importancia el tema (14/32).

Con respecto a la pregunta “*El tiempo que le dedica al tema*”, se consideraron las alternativas siguientes: 0: No le da tiempo, 1: Da un tiempo menor de lo estipulado, 2: Da el tiempo estipulado, 3: Da un tiempo mayor de lo estipulado, 4: No responde. Un 66% considera que emplea el tiempo estipulado en el programa de estudio (21/32).

Con respecto a la pregunta “*El uso de ejemplos ilustrativos*”, se consideraron las alternativas siguientes: 0: No usa, 1: Usa a veces, 2: Usa uno por concepto, 3: Usa dos o más por concepto, 4: No responde. Un 47% usa un ejemplo por concepto (15/32) y un 38% usa dos o más por concepto (12/32).

Con respecto a la pregunta “*La selección de Ejercicios y Problemas que hace*”, se consideraron las alternativas siguientes: 0: No selecciona, utiliza guías, 1: Selecciona ejercicios rutinarios, 2: Selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos, 3: Selecciona ejercicios y problemas abiertos en distintos contextos y con demostraciones, 4: No responde. El 66% de los profesores considera que selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos (21/32).

Con respecto a la pregunta “*El tipo de presentación de la materia*”, se consideraron las alternativas siguientes: 0: Privilegia lo conceptual y el lenguaje natural, 1: Privilegia lo algebraico y lo simbólico, 2: Privilegia lo gráfico, 3: Combina adecuadamente lo algebraico y lo gráfico, 4: No responde. El 38% de los profesores considera que privilegia lo conceptual y el lenguaje natural (12/32) y un 22% de los profesores privilegia lo algebraico y lo simbólico (07/32).

Con respecto a la pregunta “*La metodología que aplica en clases*”, se consideraron las alternativas siguientes: 0: Privilegia la exposición, 1: Privilegia la actividad de alumnos, 2: Privilegia la tecnología, 3: Combina metodologías, 4: No responde. El 84% de los profesores privilegia la exposición en sus clases (27/32).

7.2 Caracterización del profesor respecto del *Concepto de Derivada*

En base a los porcentajes indicados en 7.1, el perfil del profesor de cálculo corresponde a un docente que respecto del concepto de derivada, lo considera con alguna o bastante dificultad, le atribuye alguna o bastante importancia, le dedica el tiempo estipulado en el programa de estudio, ilustra con un ejemplo el concepto, selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos, privilegia lo conceptual y el lenguaje natural para presentar el concepto y privilegia las clases expositivas como metodología en clases.

7.3 Análisis clasificatorio de las variables respecto del *Concepto de Derivada*

Para el análisis clasificatorio, CHIC proporciona los siguientes elementos: árbol de similaridad, grafo implicativo y el árbol cohésitivo. A continuación se muestran estos elementos que nos van a aportar importante información respecto de la similaridad, implicación y cohesión entre las variables estudiadas.

7.3.1 Similaridad

La siguiente figura muestra la similaridad entre las variables

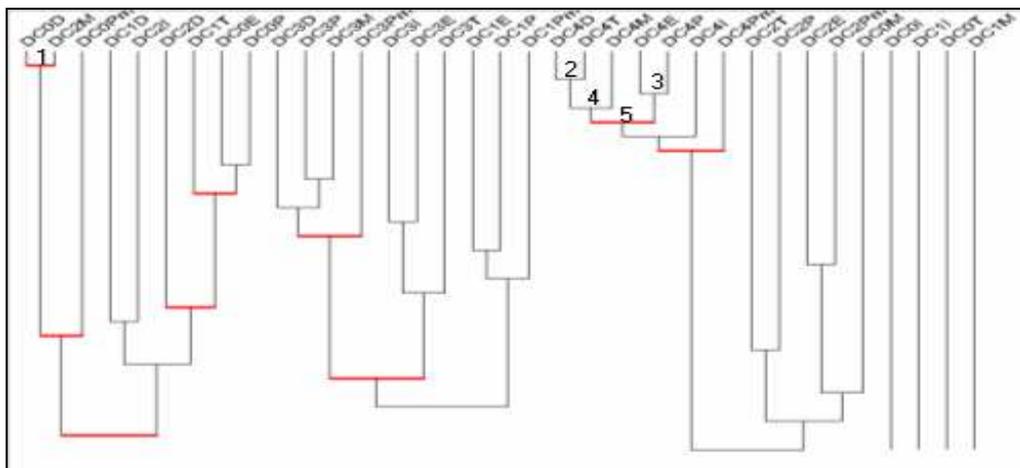


FIG. 1 – Árbol de similaridad para el *Concepto de Derivada*

Los nodos significativos corresponden a los niveles 1, 5, 7, 10, 13, 18, 20, 23 y 27.

Se clasifican en un primer nivel, con un índice de similaridad 1, la clase (DC0D , DC2M), es decir, son similares las respuestas de los profesores que responden que el grado de dificultad es nulo y los profesores que privilegian la tecnología como metodología de clases para enseñar el concepto de derivada.

Se clasifican en un décimo nivel, con un índice de similaridad 0.986716, la clase (DC1T,(DC0E, DC0P)), es decir, son similares las respuestas de los profesores que dedican un tiempo menor de lo estipulado en el

¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?

programa, con los profesores que no usan ejemplos ilustrativos y aquellos profesores que no seleccionan ejercicios y problemas, solo usan guías institucionales.

Se destacan tres grupos de nodos. El primero está compuesto por las variables: DC0D, DC2M, DC0Pm, DC1D, DC2I, DC2D, DC1T, DC0E, y DC0P, es decir, profesores que no tienen dificultad para enseñar el concepto, que privilegia la tecnología como metodología en clases, que privilegia lo conceptual y el lenguaje natural para presentar la materia, que tiene alguna dificultad para enseñar el concepto, que da bastante importancia la concepto de derivada, que no usa ejemplos ilustrativos para enseñar el concepto de derivada, y que no selecciona ejercicios, sólo utiliza guías para enseñar el concepto de derivada, es decir son los profesores que están alejados del perfil ideal del profesor de cálculo y que el mínimo esfuerzo para enseñar el concepto de derivada.

El segundo grupo está compuesto por las variables: DCED, DC3P, DC3M, DC3Pm, DC3I, DC3E, DC3T, es decir, profesores que tienen mucha dificultad para enseñar el concepto de derivada, que seleccionan ejercicios rutinarios y problemas abiertos y con demostraciones, que combinan metodologías en clases, que combinan adecuadamente lo algebraico y lo gráfico para presentar la materia, que da mucha importancia al concepto de derivada, que usan dos o más ejemplos ilustrativos para enseñar el concepto, que dedican más tiempo de lo estipulado para enseñar el concepto de derivada, es decir los profesores que dedican el mayor esfuerzo para enseñar el concepto de derivada.

El tercer grupo está compuesto por las variables: DC4D, DC4T, DC4M, DC4E, DC4P, DC4I, DC4Pm, es decir, profesores que no respondieron las preguntas. Estas variables no se tomarán en cuenta para los análisis siguientes.

7.3.2 Implicación

La siguiente figura muestra la implicación entre las variables

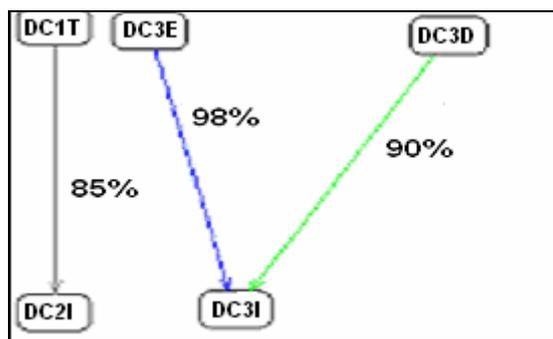


FIG. 2 – Grafo implicativo para el Concepto de Derivada

En la rama izquierda se tiene que DC1T (4)² implica DC2I (15). Se puede concluir que los profesores que dedican menos tiempo de lo estipulado en el programa de estudio, entonces le atribuyen bastante importancia al concepto de derivada, con una probabilidad de un 85% de certeza.

En la rama derecha se tiene que DC3E (12) implica DC3I (14), es decir, los profesores que usan dos o más ejemplos ilustrativos por el concepto, entonces le atribuyen mucha importancia al concepto, con una probabilidad de un 98% de certeza. Esta implicación es muy significativa.

También se da que DC3D (3) implica DC3I (14), es decir, los profesores que consideran el concepto de derivada de mucha dificultad, también le atribuyen mucha importancia al concepto, con una probabilidad de un 90% de certeza. También esta implicación se ajusta a la realidad, pues el considerar difícil la enseñanza de un concepto indica que se le da importancia a ese concepto.

7.3.3 Cohesión.

La siguiente figura muestra la cohesión entre las variables

² El número en paréntesis indica la cantidad de profesores relacionados con la variable.

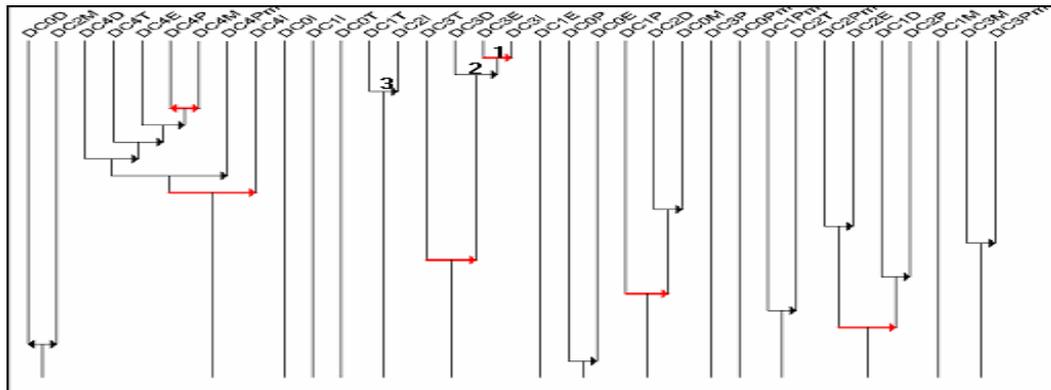


FIG. 3 – Árbol cohesivo para el Concepto de Derivada

Los nodos significativos del árbol cohesivo están en los niveles 1, 4, 9, 13, 15 y 17.

Los índices de cohesión en los niveles 1, 2 y 3 son los siguientes:

Clasificación al nivel: 1: (DC3E DC3I) cohesión: 0.975

Clasificación al nivel: 2: (DC3D (DC3E DC3I)) cohesión: 0.853

Clasificación al nivel: 3: (DC1T DC2I) cohesión: 0.849

Nuevamente se da la implicación que si el profesor usa dos o más ejemplos ilustrativos para enseñar el concepto de derivada, entonces da mucha importancia al concepto de derivada. También se da la implicación que si el profesor tiene mucha dificultad para enseñar el concepto de derivada, entonces se da la implicación anterior. En un tercer nivel se da la implicación que si el profesor dedica menos tiempo de lo estipulado para enseñar el concepto de derivada, entonces da bastante importancia al concepto de derivadas, lo que no es lógico.

7.3.4 Tipicalidad de los individuos

La Tipicalidad de la clase: **(DC3E, DC3I) (1)**, tiene como grupo optimal, con cardinalidad 10, los profesores E3, E30, E1, E32, E15, E22, E9, E6, E10, E12 (los profesores más típicos a esta clase).

La Tipicalidad de la clase: **(DC3D, DC3E, DC3I) (1,2)**, tiene como grupo optimal, con cardinalidad 5, los profesores E32, E9, E30, E6, E10 (los profesores más típicos a esta clase).

La Tipicalidad de la clase: **(DC1T, DC2I) (3)**, tiene como grupo optimal, con cardinalidad 4, los profesores E2, E7, E29, E27 (los profesores más típicos a esta clase).

7.3.5 Contribución de los individuos

La contribución a la clase: **(DC3E, DC3I) (1)**, tiene como grupo optimal, con cardinalidad 10, los profesores E3, E30, E1, E32, E15, E22, E9, E6, E10, E12 (los profesores que más contribuyen a esta clase)

La contribución a la clase: **DC3D, DC3E, DC3I (1,2)**, tiene como grupo optimal, con cardinalidad 4, los profesores E23, E26, E13, E12, E3, E15, E1, E22, E5, E32, E9, E30, E6, E10 (los profesores que más contribuyen a esta clase)

La contribución a la clase: **DC1T, DC2I (3)**, tiene como grupo optimal, con cardinalidad 4, los profesores E2, E7, E29, E27 (los profesores que más contribuyen a esta clase).

8 Análisis sobre las opiniones vertidas por los profesores respecto al Cálculo de Derivadas

Procediendo de manera similar a indicado en el ítem 7 para el tema de *Cálculo de Derivadas*, se obtuvieron los siguientes resultados que dan una caracterización del profesor respecto a este tema.

8.1 Caracterización del profesor respecto del Cálculo de Derivadas

El perfil del profesor de cálculo es una persona que respecto de la derivada, lo considera con bastante dificultad 41% (13/32), le atribuye mucha importancia 47% (15/32), le dedica el tiempo estipulado en el

¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?

programa de estudio 69% (22/32), ilustra con dos o más ejemplos los gráficos 62% (21/32), selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos 56% (18/32), combina adecuadamente lo algebraico y lo gráfico 41% (13/32), privilegia lo algebraico y lo simbólico, y combina metodologías en clases 35% (12/32)

8.2 Análisis clasificatorio de las variables respecto del *Cálculo de Derivadas*

Análogamente a lo indicado en el ítem 7.3, CHIC proporciona información sobre similaridad, implicación y cohesión entre las variables. A continuación analizamos estos tres aspectos.

8.2.1 Similaridad

La siguiente figura muestra la similaridad entre las variables



FIG. 4 – Árbol de similaridad para el *Cálculo de Derivadas*

Los nodos significativos están en los niveles: 1, 4, 6, 8, 12, 17, 20, 23, 25, 27. No se consideran los niveles del 1 al 6, pues corresponden a profesores que no respondieron las preguntas correspondientes

Se clasifica en un séptimo nivel, con un índice de similaridad 0.999912, la clase (DD0D , DD1I), es decir, son similares las respuestas de los profesores que responden que el grado de dificultad es nulo en el cálculo de derivadas y los profesores que no dan importancia al cálculo de derivadas.

Se clasifica en octavo nivel, con un índice de similaridad 0.996924, la clase ((DD0D, DD1I), DD2Pm), es decir, son similares las respuestas de los profesores de la clase anterior con los profesores que responden que privilegian lo gráfico para presentar la materia.

Se destacan cuatro grupos de nodos. El primero corresponde a la clase (DD0D, DD1I, DD2Pm, DD2E, DD1D, DD1E, DD, DD1P, DD0Pm, DD0M, DD2D, DD2T, DD2I), que la constituyen aquellos profesores que hacen sólo lo justo para cumplir con su trabajo, son los profesores del mínimo esfuerzo y por lo tanto alejados del perfil ideal indicado en el ítem 5. El segundo grupo corresponde a la clase (DD3D, DD3T, DD3I, DD3P, DD2M, DD3Pm, DD3M) y la constituyen los profesores que se preocupan de enseñar bien y que llamamos los buenos profesores, muy cercanos al perfil ideal. El tercer grupo corresponde a la clase (DD4D, DD4T, DD4M, DD4E, DD4P, DD4I, DD4Pm) y que son los profesores que no responden. El cuarto grupo corresponde a la clase (DD3E, DD1Pm, DD1M, DD2P), y también corresponde a profesores del mínimo esfuerzo.

8.2.2 Implicación.

La siguiente figura muestra la implicación entre las variables

¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?

8.2.5 Contribución de los individuos

La contribución a la clase: DD1M,DD3E (1) tiene como grupo optimal con cardinalidad 10 a los profesores: E31, E30, E3, E17, E7, E8, E18, E22, E21, E6 .

La contribución a la clase: DD2D,DD2T (2) tiene como grupo optimal con cardinalidad 12 a los profesores: E26, E27, E30, E32, E14, E6, E3, E2, E24, E23, E22, E16.

9 Análisis sobre las opiniones vertidas por los profesores respecto a la Interpretación de la Derivada

Procediendo de manera similar a indicado en el ítem 7 para el tema de *Interpretación de la Derivada*, se obtuvieron los siguientes resultados que dan una caracterización del profesor respecto a este tema.

9.1 Caracterización del profesor respecto a la Interpretación de la Derivada

El perfil del profesor de cálculo es una persona que respecto al tema *Interpretación de la Derivada*, lo considera con bastante dificultad 50% (16/32), le atribuye mucha importancia 56% (18/32), le dedica el tiempo estipulado en el programa de estudio 69% (22/32), ilustra con dos o más ejemplos 56% (18/32), selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos 57% (17/32), combina adecuadamente lo algebraico y lo gráfico 66% (21/32), y combina metodologías en clases 59% (19/32).

9.2 Análisis clasificatorio de las variables respecto de la interpretación de la Derivada

Análogamente a lo indicado en el ítem 7. 3, CHIC proporciona información sobre similaridad, implicación y cohesión entre las variables. A continuación analizamos estos tres aspectos.

9.2.1 Similaridad

La siguiente figura muestra la similaridad entre las variables

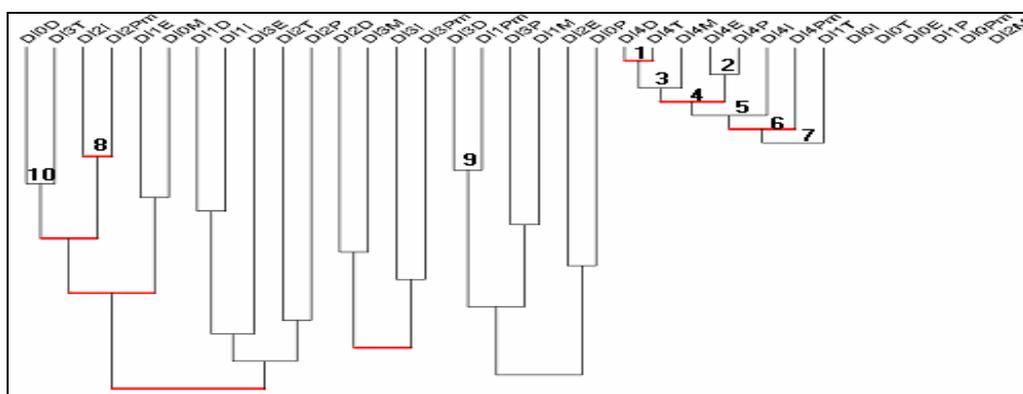


FIG. 7 – Árbol de similaridad para la Interpretación de la Derivada

Los nodos significativos están en los niveles: 1, 4, 6, 8, 14, 18, 22 y 25. La clase de nivel 8 (DI2I DI2Pm) tiene índice de similaridad 0.988761. La clase de nivel 9 (DI3D DI1Pm) tiene índice 0.969699 y la clase de nivel 10 (DI0D DI3T) tiene índice 0.952578.

No se considera el grupo de clases, donde aparecen los niveles 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, pues corresponde a la respuesta de los profesores que no contestaron las preguntas correspondientes. A nivel 8 se tiene que las respuestas de los profesores que dan bastante importancia a la interpretación de la derivada son similares a la de los profesores que privilegian lo gráfico para presentar la materia, con un nivel de similaridad de 0.988761.

A nivel 9 son similares las respuestas de los profesores que tienen mucha dificultad para enseñar la materia con los profesores que privilegia lo algebraico y lo simbólico para presentar la materia, con un índice de similaridad de 0.969699

9.2.2 Implicación

La siguiente figura muestra la implicación entre las variables

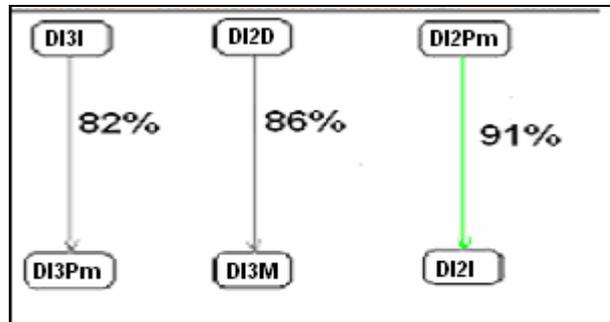


FIG. 8 – Grafo implicativo para la Interpretación de la Derivada

Este grafo nos entrega la información que DI2Pm (06) implica DI2I (10), es decir, los profesores que privilegian lo gráfico para presentar la materia, da bastante importancia a la interpretación de la derivada con una probabilidad de un 91% de certeza. También se da que DI2D (16) implica DI3M (19), es decir los profesores que tienen bastante dificultades para enseñar la interpretación de la derivada, combinan metodologías en clases, con una probabilidad de un 86% de certeza, además DI3I (18) implica DI3Pm (21), es decir, el profesor que da mucha importancia a la interpretación de la derivada, entonces combina adecuadamente lo algebraico y lo gráfico para presentar la materia, con una probabilidad de un 82% de certeza.

9.2.3 Cohesión

La siguiente figura muestra la cohesión entre las variables

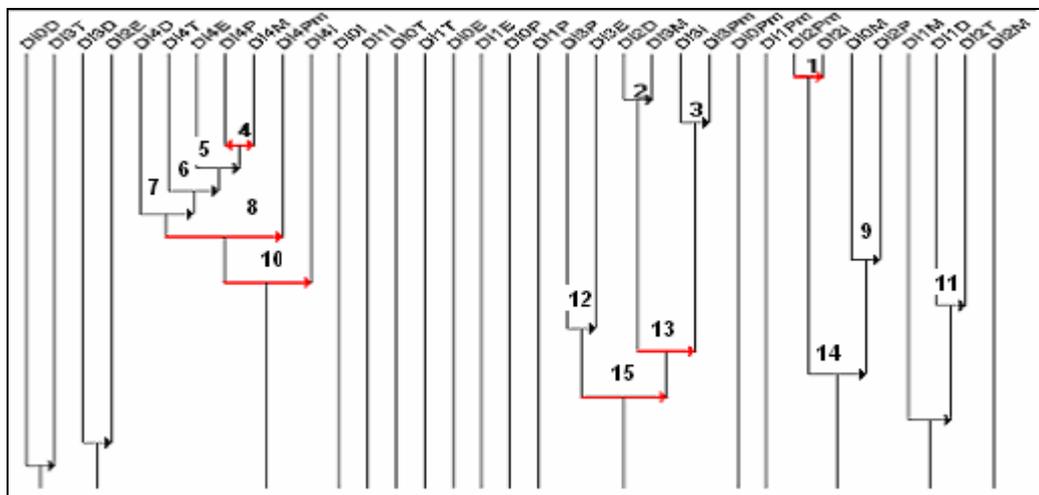


FIG. 9 – Árbol cohesivo para la Interpretación de la Derivada

Los nodos significativos están en los niveles: 1, 4, 8, 10, 13, 15. Las implicaciones del grafo implicativo (Fig. 8) se presentan en este árbol. La clase de nivel 1 (DI2Pm DI2I) tiene un índice de cohesión 0.911. La clase de nivel 2 (DI2D DI3M) tiene índice 0.863 y la clase de nivel 3 (DI3I DI3Pm) tiene índice 0.821. Se destaca el grupo de nodos representado por la clase (DI3P, DI3E, DI2D, DI3M, DI3I, DI3Pm) que corresponde a los buenos profesores. Se destaca el grupo de nodos que integran la clase de nivel 15 ((DI3P DI3E) ((DI2D DI3M) (DI3I DI3Pm))) constituida por buenos profesores, pero tiene un índice de cohesión 0.284, que es muy bajo.

¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?

9.2.4 Tipicalidad de los individuos

La tipicalidad en la clase: DI2Pm, DI2I (1) tiene como grupo optimal, con cardinalidad 5, a los profesores: E11, E8, E7, E4, E29.

La tipicalidad en la clase: DI2D, DI3M (2) tiene como grupo optimal, con cardinalidad 13, a los profesores: E26, E27, E7, E32, E2, E9, E19, E15, E17, E12, E24, E23, E10.

La tipicalidad en la clase: DI3I, DI3Pm (3) tiene como grupo optimal, con cardinalidad 21, a los profesores: E17, E31, E25, E23, E16, E2, E27, E26, E9, E3, E1, E30, E32, E14, E19, E18, E15, E24, E12, E22, E13.

9.2.5 Contribución de los individuos

La contribución a la clase: DI2Pm, DI2I (1) tiene como grupo optimal, con cardinalidad 5, a los profesores: E11, E8, E7, E4, E29.

La contribución a la clase: DI2D, DI3M (2) tiene como grupo optimal, con cardinalidad 13, a los profesores: E26, E27, E7, E32, E2, E9, E19, E15, E17, E12, E24, E23, E10.

La contribución a la clase: DI3I, DI3Pm (3) tiene como grupo optimal, con cardinalidad 15, a los profesores: E27, E26, E9, E3, E1, E30, E32, E14, E19, E18, E15, E24, E12, E22, E13.

10 Análisis sobre las opiniones vertidas por los profesores respecto al *Gráfico de Curvas mediante Derivadas*

Procediendo de manera similar a indicado en 7 para el tema de *Gráfico de Curvas mediante Derivadas*, se obtuvieron los siguientes resultados que dan una caracterización del profesor respecto a este tema.

10.1 Caracterización del profesor respecto al *Gráfico de Curvas mediante Derivadas*

El perfil del profesor de cálculo es una persona que respecto del tema *Gráfico de Curvas mediante Derivadas*, lo considera con bastante dificultad 62% (20/32), le atribuye bastante importancia 40% (13/32), le dedica el tiempo estipulado en el programa de estudio 72% (23/32), ilustra con dos o más ejemplos los gráficos 69% (22/32), selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos 54% (17/32), combina adecuadamente lo algebraico y lo gráfico 75% (24/32) y combina metodologías en clases 65% (20/32).

10.2 Análisis clasificatorio de las variables respecto al *Gráfico de Curvas mediante Derivadas*

Análogamente a lo indicado en el ítem 7.3, CHIC proporciona información sobre similaridad, implicación y cohesión entre las variables. A continuación analizamos estos tres aspectos.

10.2.1 Similaridad

La siguiente figura muestra la similaridad entre las variables

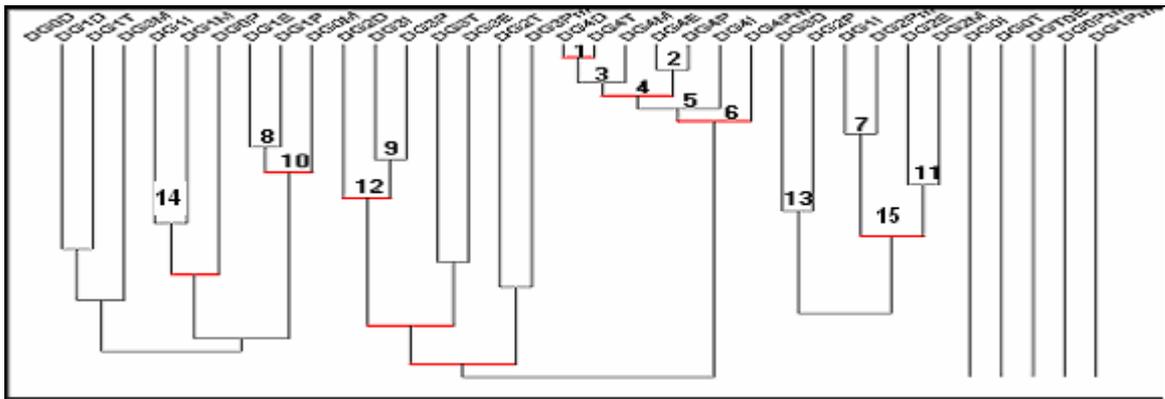


FIG. 10 – Árbol de similaridad para el Gráfico de Curvas mediante Derivadas

Los nodos significativos están en los niveles: 1, 4, 6, 10, 12, 15, 18, 22, 25. La clase de nivel 7 (DG1I DG2Pm) tiene un índice de similaridad 0.998668. La clase de nivel 8 (DG1E DG1P) tiene índice 0.998461. La clase de nivel 9 (DG3I DG3P) tiene índice 0.988447.

Se destacan cuatro grupos de nodos en este árbol. La clase (DG0D, DG1D, DG1T, DG3M, DG1I, DG1M, DG0P, DG1E, DG1P, DG0M) que corresponde a los profesores del mínimo esfuerzo, la clase (DG2D, DG3I, DG3P, DG3T, DG3E, DG2T, DG3Pm) que corresponde a los buenos profesores, la clase (DG4D, DG4T, DG4M, DG4E, DG4P, DG4I, DG4Pm) que corresponde a los profesores que no contestaron las preguntas. La clase (DG3D, DG2P, DG1I, DG2Pm, DG2E, DG2M) que también corresponde a los profesores del mínimo esfuerzo.

10.2.2 Implicación

La siguiente figura muestra la implicación entre las variables

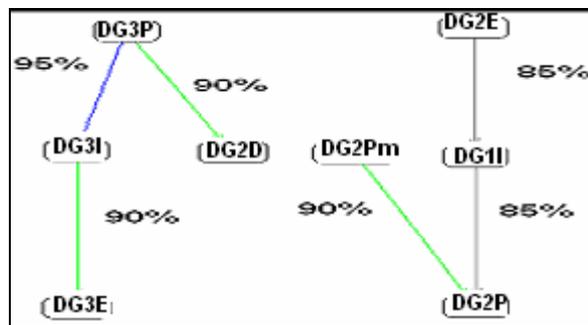


FIG. 11 – Grafo implicativo para el Gráfico de Curvas mediante Derivadas

Este grafo nos entrega la información que DG3P (09) implica DG3I (13), es decir, los profesores que seleccionan ejercicios rutinarios y problemas abiertos en distintos contextos y con demostraciones para enseñar el gráfico de curvas mediante derivadas, son profesores que dan mucha importancia al tema de gráfico de curvas, con una probabilidad de un 95% de certeza. También se da que DG3I (13) implica DG3E (22), es decir los profesores que dan mucha importancia al tema de gráfico de curvas, usan dos o más ejemplos ilustrativos para enseñar gráfico de curvas, con una probabilidad de un 90% de certeza, además DG3P (09) implica DG2D (13), es decir, el profesor que seleccionan ejercicios rutinarios y problemas abiertos en distintos contextos y con demostraciones para enseñar el gráfico de curvas mediante derivadas, tiene bastante dificultad para enseñarlo, con una probabilidad de un 90% de certeza. La implicación DG1Pm (00) a DG2P (17) significa que el profesor que privilegia lo algebraico y lo simbólico para presentar la materia, selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos para enseñar la materia, con una probabilidad de un 90% de certeza.

10.2.3 Cohesión

La siguiente figura muestra la cohesión entre las variables

¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?

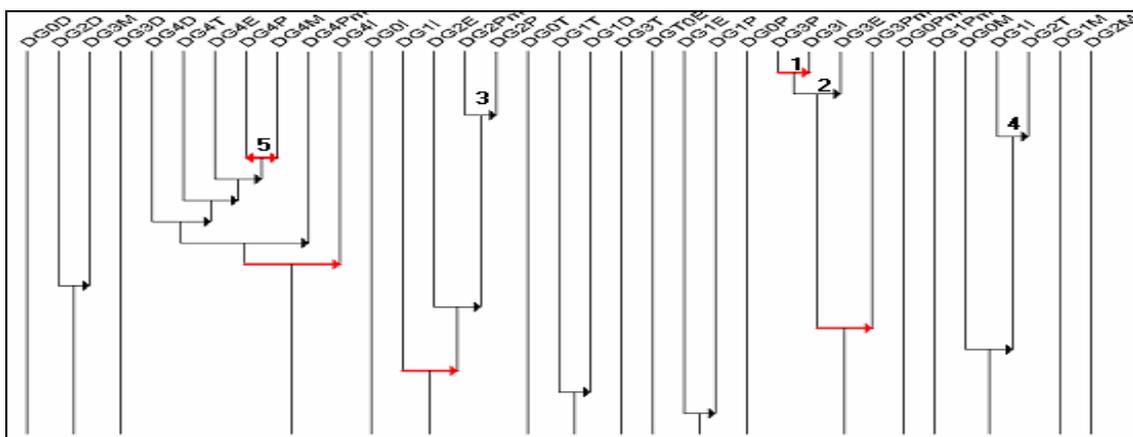


FIG. 12 – Árbol cohesivo para el Gráfico de Curvas mediante Derivadas

Los nodos significativos están en los niveles: 1, 5, 10, 13, 15. La clase de nivel 1 (DG3P, DG3I) tiene un índice de cohesión 0.981. La clase de nivel 2 ((DG3P, DG3I), DG3E) tiene índice 0.943. La clase de nivel 3 (DG2Pm, DG2P) tiene índice 0.89. Aquí aparecen nuevamente las implicaciones ilustradas en FIG. 11.

10.2.4 Tipicalidad de los individuos

La tipicalidad en la clase: DG3P, DG3I (1) tiene como grupo optimal, con cardinalidad 8, a los profesores: E32, E30, E18, E10, E15, E26, E24, E22,

La tipicalidad en la clase: DG3P, DG3I, DG3E (1,2) tiene como grupo optimal, con cardinalidad 8, a los profesores: E10, E30, E18, E32, E15, E26, E22, E24.

10.2.5 Contribución de los individuos

La contribución a la clase: DG3P, DG3I (1) tiene como grupo optimal, con cardinalidad 8, a los profesores: E32, E30, E18, E10, E15, E26, E24, E22.

La contribución a la clase: DG3P, DG3I, DG3E (1,2) tiene como grupo optimal, con cardinalidad 8, a los profesores: E10, E30, E18, E32, E15, E26, E22, E24.

11 Conclusiones

El análisis estadístico clásico nos muestra que los 32 profesores encuestados se caracterizan, en general, por enseñar el tema de derivadas en forma adecuada, es decir con un perfil cercano al ideal, señalado en el ítem 5.

Con respecto al grado de dificultad, lo consideran con *bastante dificultad*, siendo el tema *Gráfico de curvas mediante Derivadas* considerado por el 67% de los profesores como bastante difícil.

En cuanto al grado de importancia que le atribuye el profesor, éste es de *mucha importancia*, especialmente el tema de *Interpretación de la Derivada* (57%).

Con respecto al tiempo dedicado en tratar el tema, la mayoría de los profesores *utiliza el tiempo estipulado* en el programa de estudio, especialmente para tratar *Gráfico de Curvas mediante Derivadas* (72%).

Con respecto al uso de ejemplos ilustrativos, *usa dos o más por concepto*, especialmente cuando trata el tema de *Gráfico de Curvas mediante Derivadas* (69%).

Con respecto a la selección de ejercicios y problemas que hace, *selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos*, especialmente en el tema *Concepto de Derivadas* (66%).

Con respecto al tipo de presentación de la materia, *combina adecuadamente lo algebraico y lo gráfico*, especialmente en el tema de *Gráfico de Curvas mediante Derivadas* (75%)

Con respecto a la metodología que aplica en clases, en general *combina metodologías*, especialmente cuando trata el tema de *Gráfico de Curvas mediante Derivadas*.

El análisis clasificatorio nos permite destacar a un grupo de profesores que se preocupan de entregar una buena enseñanza a sus alumnos, poniendo bastante empeño en esta tarea. Sin embargo hay otro grupo de

profesores que realizan su actividad docente con un mínimo de esfuerzo. Hay un tercer grupo que no se pronuncia sobre estos temas.

Implicaciones importantes surgen del análisis implicativo que proporcionan el grafo implicativo y el árbol cohesitivo:

En el tema *Concepto de Derivada* se tiene que DC3E (12) implica DC3I (14), es decir si los profesores usan dos o más ejemplos ilustrativos, entonces le atribuyen mucha importancia al concepto de derivadas, con una probabilidad de un 98% de certeza. Los profesores más típicos a esta clase son: E3, E30, E1, E32, E15, E22, E9, E6, E10, E12.

Otra implicación importante que se da en este tema es DC3D(3) implica DC3I(14), es decir los profesores que consideran el concepto de derivada de mucha dificultad, también le atribuyen mucha importancia al concepto, con una probabilidad de un 90% de certeza. Los profesores más típicos a esta clase son: E32, E9, E30, E6, E10.

En el tema *Cálculo de Derivadas* se tiene que DD1M(10) implica DD3E(21), es decir los profesores que privilegian la actividad de los alumnos como metodología en clases, usan dos o más ejemplos ilustrativos para enseñar el cálculo de derivadas, con una probabilidad de un 98% de certeza. Los profesores más típicos a esta clase son: E31, E30, E3, E17, E7, E8, E22, E21, E6.

En el tema *Interpretación de la Derivada* se tiene que DI2Pm (06) implica DI2I (10), es decir los profesores que privilegian lo gráfico para presentar la materia, dan bastante importancia al tema, con una probabilidad de un 91% de certeza. Los profesores más típicos a esta clase son: E11, E8, E7, E4, E29.

Otra implicación importante que se da en este tema es DI2D(16) implica DI3M(19), es decir los profesores que tienen bastantes dificultades para enseñar el tema, combinan metodologías en clases, con una probabilidad de un 86% de certeza. Los profesores más típicos a esta clase son: E26, E27, E7, E32, E2, E9, E19, E15, E17, E12, E24, E23, E10.

En el tema *Gráfico de Curvas mediante Derivadas* se tiene la implicación DG3P(09) implica DG3I(13), es decir los profesores que seleccionan ejercicios rutinarios y problemas abiertos en distintos contextos y con demostraciones para enseñar el tema, son profesores que dan mucha importancia al tema., con una probabilidad de un 95% de certeza. Los profesores más típicos a esta clase son: E32, E30, E18, E10, E15, E26, E24, E22.

Volviendo a las preguntas planteadas en el ítem 2, podemos señalar que la valiosa información que entrega CHIC nos permite tener una visión de las prácticas docentes de los profesores, detectando donde están las falencias. Se observa, en general, el uso de solo un registro de representación en la enseñanza de los temas, privilegiando el registro algebraico - simbólico. Seleccionan ejercicios rutinarios y problemas clásicos; no seleccionan problemas abiertos, no realizan demostraciones, en general. La metodología que más aplican en clases es la exposición, no se privilegia la actividad de los alumnos. Haciendo más visible las prácticas docentes de los buenos profesores, éstas podrían ser imitadas por los otros profesores.

Referencias

- Couturier, R. ; Boddin, A. ; Gras, R. (1991). Clasificación Jerárquica, Implicativa y Cohesitiva. Manual del programa estadístico C.H.I.C.
- Duval, R (2004). Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Universidad del Valle.
- Gras, R. (1995). L'Analyse Statique Implicative. Conferencia dada en Methodes D'Analyses Statistiques Multidimensionnelles en Didactique des Mathematiques, 27 al 29 de enero de 1995. Caen.
- Orús, P. (2001). Análisis de datos e Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Ponencia Invitada del Seminario sobre Metodología del V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Almería.
- Orús, P. (2002). Tratamiento de Datos, Grafos y Didáctica de las Matemáticas, Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Summary

In light of the low quality of the learning of the students of calculus in the University, detected using questionnaires about the knowledge of basic concepts in mathematics, arose the preoccupation to know how the professors were teaching these contents. In the seminary of Mathematical Didactics of the Institute of Mathematics of the Catholic University of Valparaiso, IMA, was elaborated a survey directed to professors of mathematics of an institution. In this work is presented the treatment with CHIC of the results obtained on the

¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?

topic of derivative, considering seven aspects: the concept of derivative, calculation of derivative, interpretation of the derivative, key theorems, maximum and minimum, graphical of curves and other problems. For each aspect there were considered seven questions: degree of difficulty, degree of importance, distribution of the time, use of illustrative examples, use of exercises and problems, type of presentation of the topic and methodology in class. With the data processing it was managed to determine a profile of the teacher of calculus, along with the Typicality and the Contribution to his educational practice in the classroom.

Résumé

Face à la faiblesse de l'apprentissage des étudiants en calcul à l'université, questionnés au moyen de questionnaires sur la connaissance des savoirs initiaux des mathématiques, la préoccupation de savoir comment les professeurs enseignaient ces contenus nous est apparue. Dans le séminaire de didactique mathématiques de l'institut des mathématiques de l'université catholique de Valparaiso, IMA, nous avons élaboré une enquête dirigée vers les professeurs d'une institution. Dans le travail présent, nous présentons le traitement avec CHIC des résultats obtenus sur la dérivée, sous sept aspects: le concept de la dérivée, le calcul des dérivées, l'interprétation de la dérivée, les théorèmes principaux, les notions de maximum et minimum, des graphiques de courbes et des problèmes. Pour chaque aspect, nous avons considéré sept questions : degré de difficulté, degré d'importance, distribution du temps, utilisation des exemples illustratifs, utilisation des exercices et des problèmes, type de présentation de la matière et méthodologie dans la classe. Le traitement de données, l'étude de la typicalité et de la contribution ont permis de déterminer un profil de la pratique du professeur de Calcul.

Anexo 1 : Cuestionarios de las experimentaciones

ENCUESTA PARA PROFESORES QUE HAN DICTADO CURSOS EN LÍNEA DE CÁLCULO

Coloque un puntaje de acuerdo a la PAUTA adjunta. Indique.

Cursos..... Carrera.....Nombre.....

	Tópicos	Pregunta1 Gr. de dificultad del tema	Pregunta2 Grado de Importancia I	Pregunta3 Distribución Tiempo	Pregunta4 Ejemplos Ilustrativos
Nº Reales	Axiomática				
	Ecuaciones				
	Inecuaciones				
	Problemas de Aplicación				
Funciones	Concepto				
	Rep. Gráfica Fun. Especiales				
	Inyectividad Epi Bi				
	Función Inversa				
	Algebra de funciones				
	Composición				
Límites	Modelación				
	Concepto y Existencia				
	Algebra de Límites				
	Teoremas Claves				
Continuidad	Límites en el Infinito				
	Concepto				
	Continuidad y límite				
	Teoremas Claves				
Derivadas	"Pegar"				
	Concepto				
	Cálculo de Derivadas				
	Interpretación de la Derivada				
	Teoremas Claves				
	Máximos y Mínimos				
	Gráfico de Curvas				
Otros Problemas de aplicación					
Integrales	Concepto (Riemann)				
	Técnicas de Integración				
	Aplicaciones Geométricas				
	Aplicaciones Físicas y otras				

Series Num. y de Fun.				
	Concepto			
	Teoremas Claves			
	Aplicaciones			
Tópicos		Pregunta 5	Pregunta 6	Pregunta 7
Nº Reales		Ejercicios y Problemas	Tipo de Presentación de la Materia	Metodología Usada en Clases
	Axiomática			
	Ecuaciones			
	Inecuaciones			
	Problemas de Aplicación			
Funciones	Concepto			
	Rep. Gráfica Fun. Especiales			
	Inyectividad Epi Bi			
	Función Inversa			
	Algebra de funciones			
	Composición			
	Modelación			
Límites	Concepto y Existencia			
	Álgebra de Límites			
	Teoremas Claves			
	Límites en el Infinito			
Continuidad	Concepto			
	Continuidad y límite			
	Teoremas Claves			
	"Pegar"			
Derivadas	Concepto			
	Cálculo de Derivadas			
	Interpretación de la Derivada			
	Teoremas Claves			
	Máximos y Mínimos			
	Gráfico de Curvas			
	Otros Problemas de aplicación			
Integrales	Concepto (Riemann)			
	Técnicas de Integración			
	Aplicaciones Geométricas			
	Aplicaciones Físicas y otras			
Series Num. y de Fun.	Concepto			
	Teoremas Claves			
	Aplicaciones			

PAUTA

Pregunta N°1		Sobre el grado de dificultad del Tema
0	Sin Dificultad	
1	Alguna Dificultad	
2	Bastante Dificultad	
3	Mucha Dificultad	

Pregunta N°2		Sobre el grado de importancia del Tema
0	Sin importancia	
1	Alguna importancia	
2	Bastante importancia	
3	Mucha importancia	

Pregunta N°3		Sobre el Tiempo Dedicado (programa)
0	No le da tiempo	
1	Menos de lo estipulado	
2	Lo estipulado	
3	Más de lo estipulado	

Pregunta N°4		Sobre el uso de Ejemplos Ilustrati vos
0	No usa	

¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?

1	Usa a veces
2	Usa uno por concepto
3	Usa dos o más por concepto

	Pregunta N°5	Sobre la selección de Ejercicios y Problemas
0	No selecciona, utiliza guías	
1	Selecciona ejercicios rutinarios	
2	Selecciona ejercicios rutinarios y problemas clásicos	
3	Selecciona ejercicios y problemas abiertos en distintos contextos, y con demostración	

	Pregunta N°6	Sobre el Tipo de presentación de la materia
0	Privilegia lo conceptual y el lenguaje natural	
1	Privilegia lo algebraico y lo simbólico	
2	Privilegia lo gráfico	
3	Combina adecuadamente lo algebraico y gráfico	

	Pregunta N°7	Sobre la Metodología usada en clases
0	Privilegia de la exposición	
1	Privilegia la actividad de los alumnos	
2	Privilegia la tecnología	
3	Combina metodologías	