Aplicación de CHIC al estudio de las funciones elementales

Miguel Delgado, José Leandro de María, Teresa Ulecia

Departamento de Matemáticas Fundamentales
Universidad Nacional de Educación a Distancia
C/ Senda del Rey, 9, 28040 Madrid, España
{miguel, jdemaria, tulecia }@mat.uned.es

Resumen. La detección de los obstáculos epistemológicos, así como su origen y la manera de afrontarlos, constituyen una parte primordial en el estudio del hecho didáctico ya que esto permite elaborar una metodología que proporcione una buena respuesta. El trabajo establece una caracterización inicial de estos conflictos relacionados con las funciones elementales, una parte importante de los contenidos de la Enseñanza Secundaria en España. Se expone el uso de C.H.I.C. para obtener un tratamiento automatizado de la información, que respalde la experiencia docente con una perspectiva objetiva y global, en el análisis de cuestionarios realizados por alumnos de segundo ciclo de Educación Secundaria. Concluye el artículo marcando algunas dificultades que se presentan en el estudio de estas funciones, unas ya conocidas y que son, por tanto, confirmadas y otras que para los autores representan una novedad.

1 Introducción

El estudio de las funciones elementales; las funciones lineales, afines, cuadráticas y de proporcionalidad inversa, son una parte importante de las Matemáticas que debe adquirir un alumno de Educación Secundaria en España. Estas funciones constituyen el inicio de lo que suele denominarse Cálculo. Sin embargo, se observa que en su enseñanza se procede de una manera formal y muy algebraica. Esto constituye un catalizador de ciertas dificultades posteriores en aprendizajes sobre funciones y errores muy asumidos por los alumnos, así pues, es fácil justificar un estudio profundo que detecte objetivamente las causas de estas dificultades y que marque pautas para el establecimiento de una metodología específica.

Identificar el origen de obstáculos, en la enseñanza de estas funciones, es necesaria no sólo a efectos de realizar un diagnóstico de la situación y la manera de afrontarlos, sino como herramienta para establecer el funcionamiento de los conocimientos relativos a este saber. Ello posibilitará establecer alguna ingeniería didáctica que anule o minimicen esos obstáculos y, por supuesto, determinar una forma de enseñanza más adecuada.

Las Ciencias de la Educación, como ciencia social que es, se sirven de métodos de investigación con marcado talante estadísticos tanto cuantitativo como cualitativo. Si bien esto permite conocer diversos aspectos, sobre todo cuantitativos, no es menos cierto que se muestra cierta limitación para reflejar los hechos didácticos ligados al conocimiento estrictamente matemático que se generan en el aula. El profesor de Matemáticas ha debido desplegar toda su imaginación para elaborar un método ingenuo para reflejar tales hechos, métodos generalmente, basados en sus intuiciones, o creencias personales, adquiridas por la práctica docente, o por su propia experiencia como alumno en el caso de profesores menos experimentados. Sin duda son métodos que aportan una visión subjetiva y difícilmente comunicable, aun en el caso de que dicha visión pueda ser adecuada a la situación estudiada. Se hace necesario obtener una perspectiva objetiva y general que pueda ser fácilmente comunicada, y eso implica disponer de un protocolo basado en el uso de programas de ordenador de propósito general que refuten o avalen ese proceso ingenuo basado en la intuición o la experiencia del profesor ante estas dificultades que encierran ciertas destrezas matemáticas.

2 Proceso de enseñanza.

El proceso de enseñanza se llevó a cabo con el ordenador y una Unidad Didáctica diseñada para la experiencia (Ulecia, M.T., 2005). En el modelo de Unidad Didáctica se propicia un cambio de perspectiva en el uso de las nuevas tecnologías para la enseñanza de las Matemáticas. Sin abandonar el modelo expositivo tradicional, se propone la potenciación de la búsqueda (y por tanto de la investigación) por parte del estudiante de información significativa, a través del uso de herramientas informáticas que impulsen el interés por las Matemáticas.

La propuesta didáctica que desarrolla la Unidad Didáctica se basa esencialmente en el análisis minucioso de la parte matemática que compete y de las formas de uso de la Unidad, tanto por el profesor como por el alumno, en donde se pacta la necesaria complicidad de éstos y sus adaptaciones al medio. Este modelo de Unidad insiste en la necesidad de un diseño ordenado abierto, en el sentido de que el profesor pueda añadir elementos a la Unidad y modificar su uso, para poder adaptarlo a la diversidad personal de sus alumnos sin que él deba rehacer todo el proceso pactado. Evidentemente, en esta Unidad se incorporaran actividades con ordenador dentro del marco de trabajo que acuerdan profesor y estudiante.

Al desarrollar la Unidad se establecen aquellas actividades incluidas en ella, pudiéndose ver tanto desde el enfoque de la Resolución de Problemas como desde el marco de las Situaciones Didácticas. Evidentemente, el profesor puede promover nuevas actividades no contenidas en la Unidad, que se incorporarán a la misma, pero también los alumnos pueden proponerlas si se da el caso.

El modelo propone un tipo de aprendizaje que requiere la actuación en el aula con una metodología activa e investigadora. Con ella se trata de aprender a aprender, a "descubrir", ya que el alumno utiliza de manera adecuada técnicas activas, construyendo su propio aprendizaje a partir de experiencias. Pero en este proceso de enseñanza, toda actividad y toda experiencia, debe ser guiada y orientada por el profesor, así como enmarcada en la estructura conceptual del alumno, utilizando procedimientos y metodología idóneos y adecuados a la edad. En este proceso constructivo interno (proceso de reorganización cognitiva), el alumno aprende al producirse un conflicto cognitivo, es decir, una contradicción entre lo que el sujeto sabe y lo nuevo que se le presenta. Es claro que este aprendizaje depende del grado de desarrollo y maduración de las experiencias y conocimientos previos del alumno, así como de los aprendizajes subyacentes.En la Unidad propuesta, esto se lleva a cabo a partir de la realización de una serie de actividades que enfrentan al alumno a distintas situaciones en las que debe construir el conocimiento matemático mediante la resolución del problema planteado en la situación como respuesta a las exigencias del Medio.

Además, el modelo didáctico se basa en los siguientes axiomas metodológicos generales:

A1- Los contenidos matemáticos deben estar seleccionados y ordenados con una estructuración clara que resalte sus relaciones.

A2- La actuación del profesor debe estimular la enseñanza activa y reflexiva, posibilitando que los alumnos descubran y construyan una parte relevante de los conceptos seleccionados a través de su propio trabajo de experimentación y observación.

A3- El profesor debe tener una idea clara de los conocimientos previos que poseen los alumnos sobre el tema que se va a comenzar a trabajar.

A4- Las actividades deben facilitar varios niveles de profundización, y de detalle en el desarrollo de su resolución, posibilitando que todos los alumnos puedan aprender algo nuevo y extraer sus propias conclusiones

A5- Las actividades y situaciones problemáticas deben ser cercanas a las vivencias personales de los alumnos e incorporar aspectos lúdicos de las Matemáticas conectados con la Historia, el Arte y su entorno.

3 Aplicación del Programa C.H.I.C.

La utilización de C.H.I.C. en nuestra investigación (Ulecia, M.T., 2005) se realizó sobre unos cuestionarios que alumnos de segundo ciclo de ESO realizaron sobre el tema de funciones elementales. Esta aplicación nos sirvió para poder tomar decisiones sobre los mismos, ya que C.H.I.C. permite clasificar tanto las preguntas como a los propios alumnos por sus respuestas.

Análisis a priori de los cuestionarios diseñados:

Este análisis sigue la línea de trabajo iniciada por (Orús P. y Pitarchi, I., 2002), utilizando el mismo instrumento didáctico para modelizar el razonamiento del alumno. Es decir, se utiliza el análisis tipológico (Chandon, J.L. y Pinson, S., 1980), en el que por medio de una matriz booleana de doble entrada, llamada matriz a priori del cuestionario (MAP), se caracterizan las preguntas de éste según los diversos destrezas o contenidos matemáticos asociados a dichas preguntas; esto define ciertas variables binarias utilizando el dígito 1 para el caso que la pregunta conlleve esa destreza y el 0 para el caso contrario. Las respuestas se han introducido en una hoja de cálculo Excel, resultando la matriz a priori MAPT. Los resultados del análisis nos ayudan así a tomar decisiones respecto de cada uno de los tests y a efectuar modificaciones si parecen pertinentes para lograr un mejor aprovechamiento de los mismos.

Análisis a posteriori de las respuestas de los alumnos al cuestionario:

Por último se utiliza C.H.I.C. sobre la matriz de datos que representan las respuestas (correcta/incorrecta) de los estudiantes. De esta forma se realiza el estudio a posteriori del cuestionario. Los grafos y árboles que se obtienen permiten analizar los resultados de los estudiantes con respecto a su trabajo matemático.

3.1 Cuestionarios.

Para la experiencia se confeccionaron cuatro tests. El primero trataba de establecer el nivel de conocimiento de cuestiones previas al tema "Estudio de funciones elementales"; el segundo, de comprobar la comprensión de los conceptos y técnicas básicas que el alumno tenía de dicho tema (este test se consideraba necesario dado que se daba la situación de experimentar con alumnos de los dos cursos del segundo ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria, 3º y 4º de ESO); el tercero contenía las mismas preguntas que el segundo pero reordenadas de otra forma y, por último, un test complementario que pudiera medir el estado de afianzamiento del estudiante en lo tratado.

En este artículo, por razones obvias, nos ocuparemos sólo de dos de ellos. Hemos elegido como más interesantes los dos de Contenidos básicos ya que lo realizaron los alumnos dos veces: antes y después de que el profesor desarrollara con sus estudiantes la Unidad Didáctica "Estudio de funciones elementales" (Delgado, M. y otros, 2005). Este test consta de 19 preguntas (contenidas en el Anexo) y su objetivo es, como hemos comentado anteriormente, ponderar la capacidad de los alumnos en cuestiones que pueden ser consideradas básicas de esta Unidad Didáctica.

3.1.1 Test de Contenidos Básicos.

En el proceso matemático, en todos los niveles desde el elemental hasta la investigación, aparece la dificultad de la relación entre el lenguaje y su significado, desde la expresión algebraica y el objeto que representa hasta la idea matemática que subyace. Esta dificultad es especialmente palpable en los niveles de secundaria donde el alumno se enfrenta al reto de asociar una expresión con una regla o función, que para mayor confusión también tiene una representación gráfica, siendo un todo que pensamos que es necesario que el alumno se familiarice desde las primeras etapas educativas.

Así el cuestionario ha sido diseñado para diagnosticar los diferentes estados de esta relación bipolar algebraico- geométrico que subyace al estudio de las funciones. Este proceso de formación del concepto es epistemológico. Sólo cuando en Matemáticas se ha logrado completar de forma biunívoca la expresión algebraica y su representación geométrica se puede tener la seguridad de que el conocimiento es coherente y completo.

En el caso estudiado es especialmente importante sustentar que el alumno aprenda cómo debajo de una ecuación (en este nivel muy sencilla) hay un concepto que puede ser visualizado en forma de gráfica. Nos atrevemos a afirmar que esta idea tiene más importancia aún que conozcan los primeros tipos de funciones que, por otro lado una vez asegurado este aprendizaje, resultan muy sencillas.

Como anécdota representativa se puede ver en los árboles de jerarquías que las funciones constantes representan mayor dificultad que otras más complejas, como la lineales o las cuadráticas, y es debido a la expresión "no dinámica" de dicha expresión, que no depende de una variable sino que se plantea como una constante o número. Con una buena fundamentación del método gráfico de representación esta dificultad queda subsanado.

El cuestionario se ha elaborado siguiendo las ideas anteriormente expuestas. Una decisión técnica fue la no linealidad de la dificultad de los conceptos preguntados con el fin de que unas preguntas no llevasen a otras y poder medir de la forma más aislada posibles los conocimientos de los alumnos, tanto en el test previo como en el posterior a las actividades.

Así las metas de los cuestionarios han sido:

1.- Reconocer la expresión algebraica de: funciones constantes (Preguntas 1 y 4), funciones lineales (Preguntas 8 y 19), funciones afines (Pregunta 6), funciones cuadráticas de vértice el origen de coordenadas (Preguntas 9 y 10).

2.- Reconocer la gráfica de: funciones constantes (Pregunta 16), funciones lineales. (Preguntas 2 y 3), funciones afines (Pregunta 12), funciones cuadráticas de vértice el origen de coordenadas (Preguntas 11 y 13).

3.- Disponer de una mecánica eficaz a la hora de representar gráficamente, a partir de su expresión algebraica, las funciones: constantes (Pregunta 16), lineales (Preguntas 3, 8 y 19), afines (Preguntas 5 y 6), cuadráticas de vértice el origen de coordenadas (Preguntas 4, 7, 10 y 11).

4.- Disponer de una mecánica eficaz a la hora hallar, a partir de su gráfica, la expresión algebraica de las funciones: constantes (Pregunta 16), lineales (Preguntas 8 y 19), afines (Pregunta 17), cuadráticas de vértice el origen de coordenadas (Pregunta 18).

3.2 Análisis a posteriori del test Previo de Contenidos Básicos.

Para el análisis exploratorio del primer test de Contenidos Básicos, T_2 (test previo), se utiliza una matriz booleana de doble entrada, denotada por MPT_2Ex, y definida a partir de las respuestas de los alumnos. En la matriz aparecen 19 variables binarias:

Acertar la pregunta i del test T_2 (T_2AP_i) con i = 1,…,19.

Una vez introducidas las respuestas en una hoja de cálculo Excel, utilizando el dígito 1 para el caso afirmativo y el 0 para el negativo, resulta la matriz MPT_2Ex,.

3.2.1 Árbol de similaridad entre las preguntas de T_2 relativo a MPT_2Ex.

Se aplica el programa C.H.I.C. a esta matriz para obtener entre las 19 preguntas del test: El árbol de similariad y el árbol jerárquico de cohesión. Un criterio estadístico nos permite conocer cuáles son los **niveles significativos** del árbol de similaridad entre todos los niveles que lo constituyen. Estos son los niveles donde se forme una partición y las clases estén más de acuerdo con los índices de similaridad iniciales. Ya que en cada nivel del árbol se forma una clase donde la similaridad es menos buena que la de las clases formadas anteriormente y mejor que la de las clases que aún deben formarse. Por tanto, serán estos niveles los que particularmente interesa interpretar y que el programa C.H.I.C. proporciona **en rojo** en la constitución de la jerarquía.

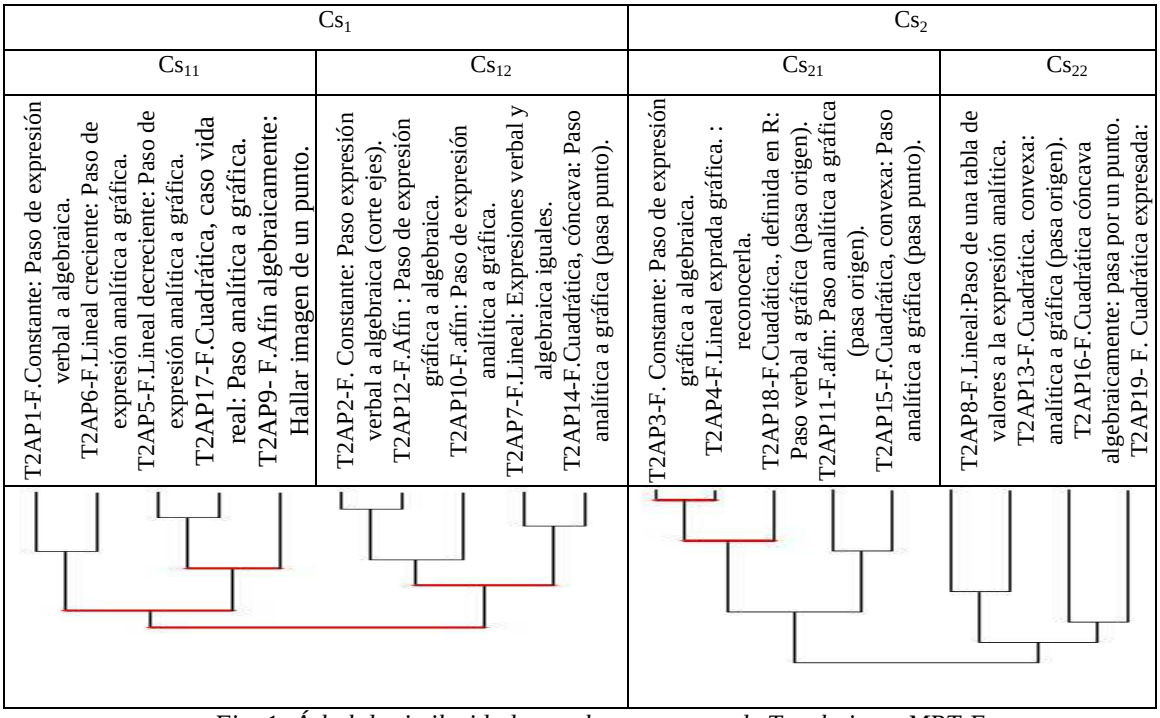


Fig. 1: Árbol de similaridad entre las preguntas de T_2 relativo a MPT_2Ex.

Este árbol nos muestra dos clases de similaridad que se dividen a su vez en dos subclases. A la vista de los niveles significativos hay que destacar las clases:

Clase de similaridad [Cs_{21}]: El porcentaje medio de alumnos que contestaron bien a las preguntas es del 36%, lo que la coloca, en cuanto a aciertos, en penúltimo lugar, delante de la clase [Cs_{12}]. En ella encontramos cuatro nudos de los cuales los dos primeros son significativos. El primero, el más significativo de todo el árbol, agrupa las preguntas P_3 y P_4 y se encuentra en el nivel 1 con un coeficiente de similaridad es del 0,987625.

En la pregunta P_3 se pide la expresión analítica de una función constante a partir de la gráfica y la han respondido el 35% de los alumnos. En cambio, en la pregunta número 4 el porcentaje de aciertos sube ligeramente al 41% y plantea un ejemplo de clasificación de una función lineal expresada en forma gráfica.

El siguiente nudo, también significativo, asocia las preguntas anteriores con la 18; se encuentra en el nivel 5 con un índice de similaridad de 0,909688. En el enunciado de esta pregunta aparece una expresión verbal con el término "número real" lo que podría explicar que la hayan acertado sólo el 29% de los alumnos y que la convierte, junto con la pregunta P_{15}, en las preguntas de esta subclase peor contestadas.

El último nudo de esta clase agrupa todas las preguntas de [Cs_{21}] y está en el nivel 12 (índice 0,655373).

Los siguientes nudos significativos pertenecen a la otra clase, [Cs_{11}].

Clase de similaridad [Cs_{11}]: Con un porcentaje medio de aciertos del 38% de los alumnos. Las funciones tratadas en estas preguntas son de los cuatro tipos: constante, lineal, afín y cuadrática El primer nudo significativo aparece en un nivel bastante bajo, nivel 9 de 17 niveles, y agrupa las P_5, P_9 y P_{17}.

Las dos primeras están ligadas por un nudo no significativo, en el nivel 3 con índice de similaridad 0,976183, (acertadas ambas por el 35% de los alumnos). Se puede comprobar con los enunciados que para contestar acertadamente a estas preguntas es necesario reconocer la gráfica de ciertas funciones expresadas en forma analítica, destreza que, generalmente, dominan peor los alumnos.

Los siguientes nudos significativos aparecen ya en niveles bastante bajos (niveles 11 y 14). Dentro de los nudos no significativos el más alto está, en el segundo nivel, en la clase Cs_{12}.

Clase de similaridad [Cs_{12}]: El primero de los nudos no significativo agrupa los aciertos de las preguntas P_2 y P_{12} (con un índice de 0,978362). Vemos que en estas preguntas se plantea el paso de la expresión analítica a la gráfica y viceversa. En ambas la opción correcta era la D (Ninguna de las opciones anteriores), es decir, entre las tres primeras opciones de respuesta no se daba la correcta.

En la pregunta P_{12} se trata de reconocer la expresión analítica de una función afín que está expresada gráficamente que suele encerrar más dificultad que el paso en sentido contrario. El paso más sencillo (de la expresión analítica a la expresión gráfica) en la pregunta P_2 se complica al cuestionarse los cortes con los ejes de coordenadas, a pesar de tratarse de una función constante. P_2, P_{12} junto con la pregunta P_7 son las preguntas peor contestadas. En el enunciado de esta última pregunta aparecen tres expresiones de una misma función lineal: dos algebraicas y una verbal, en la que se encuentra de nuevo contenido el término de "número real". Esto podría explicar tan mal resultado: sólo el 18% de los estudiantes han contestado bien.

3.2.2 Árbol jerárquico de la matriz MPT_2Ex.

El programa C.H.I.C. aplicado de nuevo a la matriz MPT_2Ex nos proporciona el árbol jerárquico para realizar un análisis de cohesión implicativa:

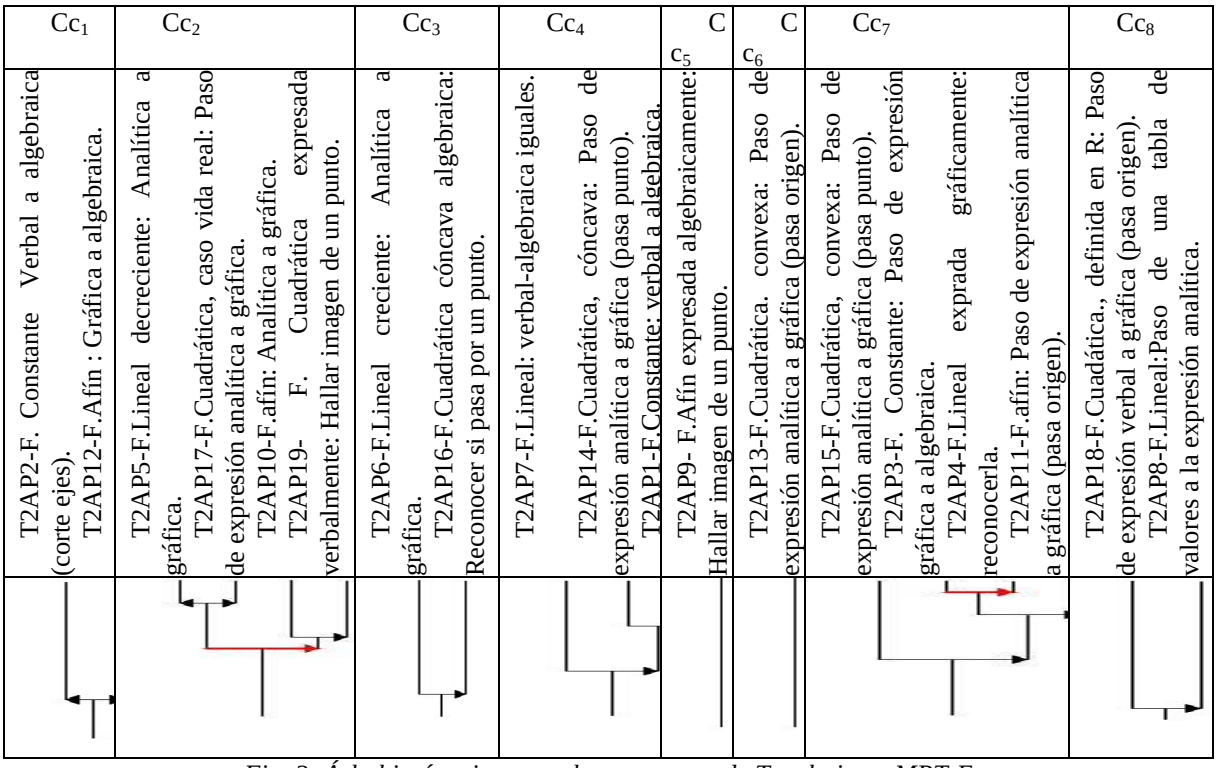


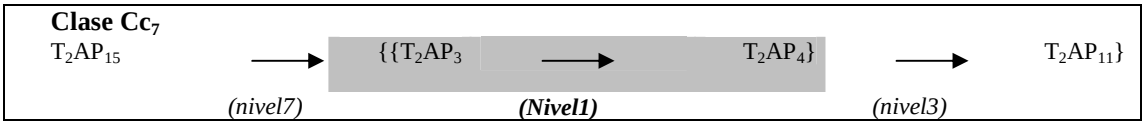
Fig. 2: Árbol jerárquico entre las preguntas de T_2 relativo a MPT_2Ex.

Se pueden apreciar en el árbol anterior ocho clases de cohesión con dos cohesiones simétricas y dos nudos significativos. El mayor nivel de significación (nivel 1, cohesión 0,982) agrupa T_2AP_3 y T_2AP_4.El segundo y último nudo significativo aparece en el nivel 6, cohesión 0,719, y agrupa las preguntas: 5, 17, 10 y 19.

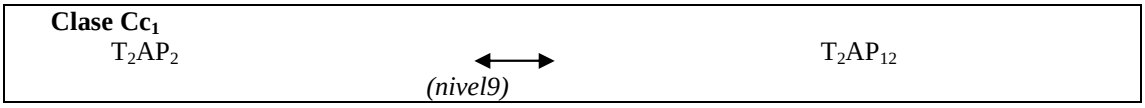
Preguntas que en el árbol de similaridad, Fig. 1, ya estaban próximas con nivel significativo importante vuelven a aparecer implicadas en éste. Exponemos a continuación estos casos.

Las preguntas P_3, P_4 P_{11} y P_{15} que forman parte de la clase $[Cs_{21}]$ del árbol de similaridad, siguen estando agrupadas en el árbol jerárquico de cohesión. La pregunta 11 que en el árbol de similaridad aparecía en un nivel bajo, en éste pertenece al nivel 3.

En este árbol se obtiene un primer nudo significativo en el nivel 1, que es el más importante de toda la jerarquía, y dos no significativos en los niveles 3 y 7.



Parte de las preguntas que formaban la segunda clase, $[Cs_{12}]$ en el árbol de similaridad, se subdividen en dos clases para formar las primeras clases del árbol de cohesión, de ellas la Cc_1 es la más interesante



Parte de la subclase $[Cs_{11}]$ del árbol de similaridad se agrupa en el árbol jerárquico de cohesión con un nudo doble en el nivel 2

En el nivel sexto aparece el último nudo significativo que relaciona estas dos variables con T_2AP_{10} y $T_2AP_{19.}$

3.2.3 Conclusiones del análisis a posteriori del test Previo de Contenidos Básicos.

La información proporcionada por el programa nos permite observar que para todas funciones elementales (constantes, lineales, …) los aciertos obtenidos son (Constantes 35%; Lineales 36%; Afines 37% y Cuadráticas 38%,) muy similares, sin decremento en las funciones más complejas.

Solamente dos preguntas (P_1 y P_{19}) han sido contestadas correctamente por más de la mitad de los alumnos.

No se relacionan adecuadamente la forma semejante de dos gráficas, destacándose la **dificultad de distinguir dos gráficas trasladadas**. Además, la relación de pertenencia de un punto a la gráfica de una función no está asumida por el alumno ($P_{10,}$ P_{13} y P_{15}), incluso cuando lo solicitado es reconocer los posibles puntos de corte de la gráfica con los ejes de coordenadas (P_2). Esta dificultad puede que se genere de la forma de presentar el estudio de gráficas de las funciones elementales.

Otra dificultad se presenta al reconocer y relacionar las distintas expresiones de una función destacándose los fallos a la hora de "Pasar de la expresión gráfica a la algebraica (P_{12} y P_3)" o "Pasar de la expresión verbal a la algebraica (P_7 y P_1)".

Se presentan problemas a la hora de reconocer las expresiones de los distintos tipos de funciones elementales, constantes, lineales y cuadráticas ($P_{3,}$ P_4 y $P_{18,}$ preguntas unidas por los dos primeros nudos significativos del árbol de similaridad).

Un nudo en el segundo nivel une las preguntas P_2 y P_{12} en las que la solución era D (ninguna de las anteriores) y que han sido las preguntas en las que han obtenido el peor resultado.

No manejan bien la expresión verbal, sobre todo cuando en ella aparece el término "número real" o si la gráfica pasa por el origen de coordenadas (preguntas $P_{7,}$ P_{14} y $P_{18,}$ las dos primeras relacionadas por un nudo de nivel 14).

En general, los resultados más satisfactorios los han obtenido en el paso de la expresión analítica a la expresión gráfica ($P_{5,}$ $P_{6.}$ y $P_{10,}$ preguntas asociadas por el nudo significativo de nivel 16), salvo cuando la pregunta se complica con cortes con los ejes de coordenadas (P_2).

Existen sólo tres implicaciones con un nivel de confianza superior al 85%, una de ellas simétrica.

Las dos primeras (nivel 1, cohesión 0,982 y nivel 2, cohesión 0,882) no son implicaciones muy lógicas, pues en ellas se interpreta que los estudiantes-alumnos que han contestado correctamente a la función más sencilla también lo hacen con la más complicada, es decir, P_3 (función constante) → P_4 (función lineal) y P_5 (función lineal) P_{17} (función cuadrática).

La primera implicación confirma la dificultad que encierra para estos alumnos el paso de la expresión gráfica a la analítica, incluso en el caso de la función constante,

La doble implicación puede ser debida a que las soluciones propuestas en ambas preguntas son similares. En los dos casos aparecen las gráficas de funciones lineales o parábolas.

Lo mismo sucede con la implicación del tercer nivel (cohesión 0,855) que va contra toda lógica. En esta implicación P_3 (función constante) y P_4 (función lineal) → P_{11} (función afín). Una explicación a esto podría ser que en el caso de la pregunta P_{11}, tanto en el enunciado como en las distintas soluciones, se tratan de sendas funciones afines, sin embargo en las otras preguntas se mezclan distintos tipos de funciones: constante, lineal y afín. Lo que confirma que no tienen un deseable dominio en reconocer los distintos tipos de funciones elementales.

3.3 Análisis a posteriori del test Posterior de Contenidos Básicos

Esta sección se ocupa del análisis exploratorio del tercer test, realizado por los alumnos después de desarrollar la Unidad Didáctica en clase.

3.3.1 Árbol de similaridad entre las preguntas de T_3 relativo a MPT_3Ex

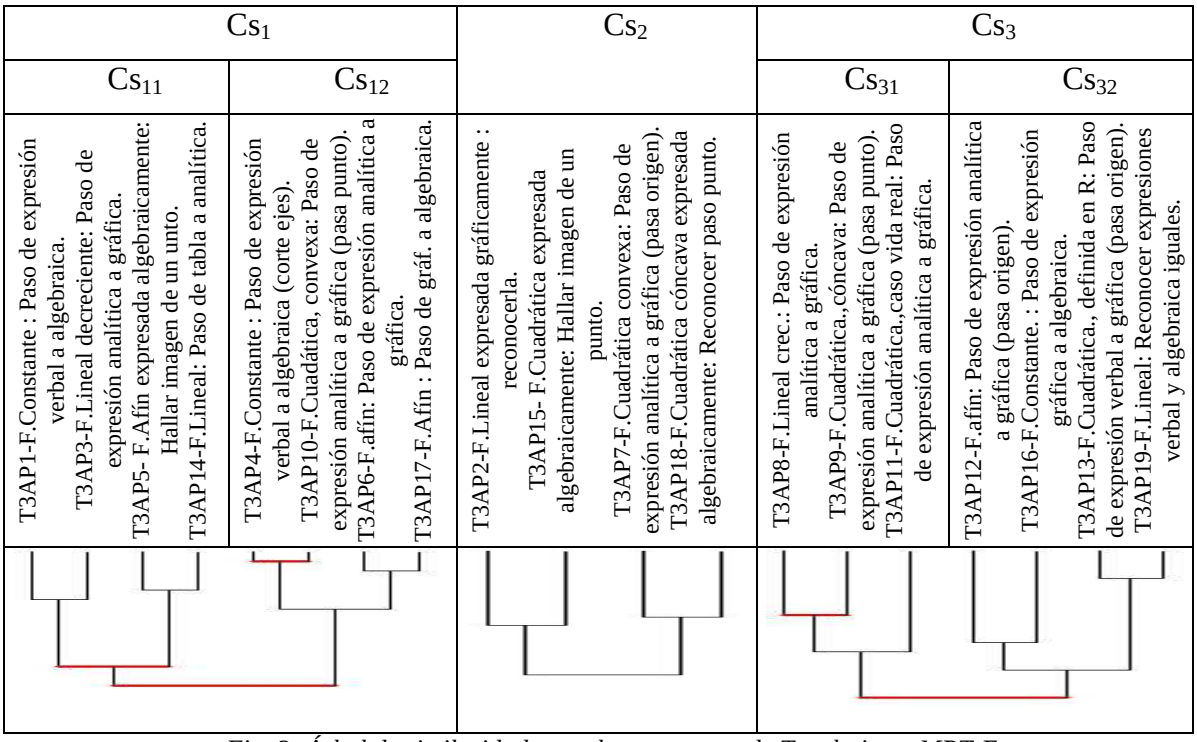


Fig. 3: Árbol de similaridad entre las preguntas de T_3 relativo a MPT_3Ex

Este árbol nos proporciona tres clases de similaridad [Cs_1], [Cs_2] y [Cs_3]. A su vez [Cs_1] y [Cs_3] se dividen en dos subclases cada una: [Cs_1] = {[Cs_{11}] = {T_3AP_1, T_3AP_3, T_3AP_5, T_3AP_{14}}, [Cs_{12}] = {T_3AP_4, T_3AP_{10}, T_3AP_6, T_3AP_{17}}} ; [Cs_2] = {T_3AP_2, T_3AP_{15}, T_4AP_{14}, T_3AP_7, T_3AP_{18}} y [Cs_3] = {[Cs_{31}] = {T_3AP_8, T_3AP_9, T_3AP_{11}}, [Cs_{32}] = {T_3AP_{12}, T_3AP_{16}, T_3AP_{13}, T_3AP_{19}}}.Entre ellas destaca la clase [Cs_1] que contiene tres de los cinco nudos significativos del árbol y la [Cs_3] con los otros dos.

Clase de similaridad [Cs_1]: En [Cs_1], la subclase más relevante es la [Cs_{12}] en la que aparece el nudo más significativo de toda esta clasificación en el nivel 1 con un índice de 0,933188, relacionando T_3AP_4 y T_3AP_{10}, aciertos de las preguntas P_4 y P_{10}.

Esta subclase contiene cuatro elementos: T_3AP_4, T_3AP_{10}, T_3AP_6 y T_3AP_{17}. El porcentaje medio de aciertos en estas cuatro preguntas fue del 19%, que, como comprobaremos más adelante, representa el peor de las cinco subclases. La explicación podría ser que en todas estas preguntas se pide pasar de la expresión analítica a la gráfica o viceversa con la complicación de tener en cuenta un corte con los ejes (P_4) o si la función pasa por un punto (P_{10}, P_6 y P_{17}); a esto se añade que en todas ellas la opción de respuesta correcta era la D (ninguna de las anteriores).

El nudo significativo aparece en el nivel 1 con un índice 0,933188 y relaciona las variables T_3AP_4 y T_3AP_{10} en las que se que se pide pasar de la expresión analítica a la expresión gráfica, en el caso de la pregunta P_4 de una función constante y en la pregunta P_{10} de una función cuadrática cóncava. En ambos casos el porcentaje de aciertos ha sido bajo (25% y 6%, respectivamente).

En el nivel siguiente aparece otro nudo no significativo que asocia las variables T_3AP_6 y T_3AP_{17} con un índice de similaridad de 0,925538. En las dos preguntas correspondientes a dichas variables se solicitaba al alumno la expresión gráfica (P_6) o la algebraica (P_{17}) de sendas funciones afines en las que debían comprobar si las funciones pasaban por ciertos puntos.

El último nudo de [Cs_{12}] aparece en el nivel 6 con un índice de 0,7338 y relaciona sus cuatro elementos. El siguiente nudo significativo pertenece a la clase [Cs_{31}] y enlaza en el nivel 7 las variables T_3AP_8 y T_3AP_9 con un índice de similaridad 0,708057.

Clase de similaridad [Cs_{31}]: De las dos subclases que forman la clase de [Cs_3], ésta es la más relevante pues contiene el primer nudo significativo de la clase. El porcentaje medio de aciertos fue del 69%, siendo la pregunta

P_9 la menos acertada de la subclase (63% de aciertos) seguramente porque en ella se cuestionaba el paso de la gráfica de la función por el origen.

Este nudo que agrupa las variables T_3AP_8 y T_3AP_9 se encuentra en el nivel 7 con un índice de similaridad de 0,708057. Se observa en las figuras y que en las preguntas correspondientes a dichas variables se solicitaba al alumno que reconocieran la gráfica de ciertas funciones (lineal en P_8 y cuadrática en P_9) expresadas en forma analítica.

Lo mismo que se requería en la última pregunta de esta subclase (P_{11}) relacionada con las dos anteriores por un nudo no significativo que se encuentra en el nivel 11 (índice 0,443633). El porcentaje medio de aciertos en estas tres preguntas fue del 69%, siendo la pregunta P_9 la menos acertada de la subclase (63% de aciertos) seguramente porque en ella se cuestionaba el paso de la gráfica de la función por el origen de coordenadas.

Los tres restantes nudos significativos de éste árbol no empiezan a aparecer hasta un nivel bastante inferior (12 de 16 niveles).

3.3.2 Arbol jerárquico de la matriz MPT_3Ex relativo a la matriz MPT_3Ex

Se aplica otra vez el programa C.H.I.C. a la matriz MPT_3Ex para realizar el análisis de cohesión implicativa y se obtiene el árbol jerárquico que muestra nueve clases:

$[Cc_1] = \{T_3AP_2\}$; $[Cc_2] = \{T_3AP_4, T_3AP_5, T_3AP_{14}, T_3AP_{18}\}$; $[Cc_3] = \{T_3AP_6, T_3AP_9, T_3AP_3, T_3AP_1\}$; $[Cc_4] = \{T_3AP_{10}\}$; $[Cc_5] = \{T_3AP_{11}\}$; $[Cc_6] = \{T_3AP_{12}, T_3AP_{16}\}$; $[Cc_7] = \{T_3AP_{13}, T_3AP_{19}, T_3AP_{15}\}$; $[Cc_8] = \{T_3AP_{17}\}$ y $[Cc_9] = \{T_3AP_{18}, T_3AP_7\}$.

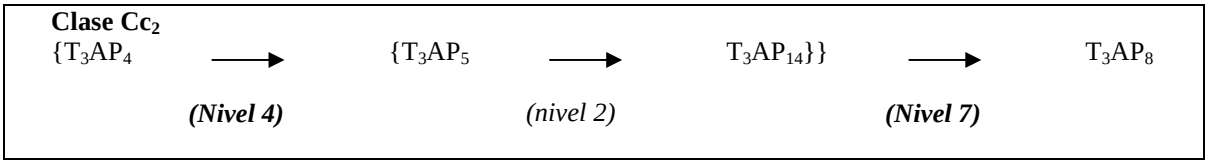
Se aprecian en este árbol, contenido en la figura siguiente, una cohesión simétrica, que además es significativa, en la séptima clase y dos nudos significativos más en la segunda clase. El mayor nivel de significación (nivel 1, cohesión 0,889) es el de la cohesión simétrica que agrupa T_3AP_{13} y T_3AP_{19}.

Cc_1	Cc_2	Cc_3	Cc_4	Cc_5	Cc_6	Cc_7	Cc_8	Cc_9
T3AP2-F.Lineal expresada gráficamente : reconocerla	T3AP4-F.Constante : Paso de expresión verbal a algebraica (corte ejes). T3AP5- F.Afín expresada algebraicamente: Hallar imagen de un punto. T3AP14-F.Lineal: Paso de una tabla de valores a la expresión analítica. T3AP8-F.Lineal crec.: Paso de analítica a gráfica.	T3AP6-F.afín: Paso de expresión analítica a gráfica. T3AP9-F.Cuadrática.,cóncava: Paso de expresión analítica a gráfica (pasa punto). T3AP3-F.Lineal decreciente: Paso de expresión analítica a gráfica. T3AP1-F.Constante : Paso de expresión verbal a algebraica	T3AP10-F.Cuadática, convexa: Paso de expresión analítica a gráfica (pasa punto).	T3AP11-F.Cuadrática.,caso vida real: Paso de expresión analítica a gráfica.	T3AP12-F.afín: Paso de expresión analítica a gráfica (pasa origen). T3AP16-F.Constante. : Paso de expresión gráfica a algebraica.	T3AP13-F.Cuadrática., definida en R: Paso de expresión verbal a gráfica (pasa origen). T3AP19-F.Lineal: Reconocer expresiones verbal y algebraica iguales. T3AP15- F.Cuadrática expresada algebraicamente: Hallar imagen de un punto.	T3AP17-F.Afín : Paso de expresión gráfica a algebraica.	T3AP18-F.Cuadrática cóncava expresada algebraicamente: Reconocer si pasa por un punto. T3AP7-F.Cuadrática convexa: Paso de expresión

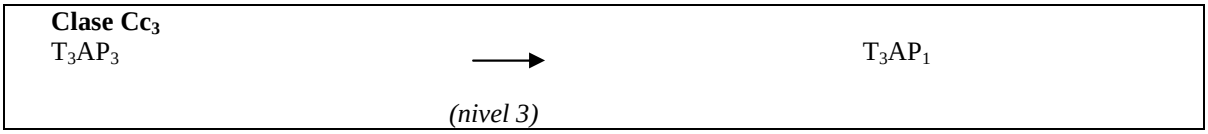
Fig.4: Árbol jerárquico entre las preguntas de T_3 relativo a MPT_3Ex

En este árbol de cohesión implicativa aparecen implicadas preguntas que en el árbol de similaridad, Fig. 3 ya están próximas. Las variables T_3AP_3, T_3AP_5 y T_3AP_{14} que formaban parte de la clase $[Cs_{11}]$ del árbol de similaridad, siguen estando agrupadas en el árbol jerárquico de cohesión. Se obtienen dos nudos no simétricos, el

segundo (nivel 4) significativo. Aunque a un nivel bastante más bajo, en el árbol jerárquico de cohesión existe otro nudo significativo que relaciona las variables anteriores con otra variable, esta vez de [Cs_{31}].

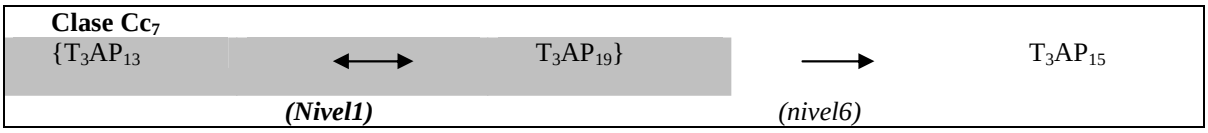


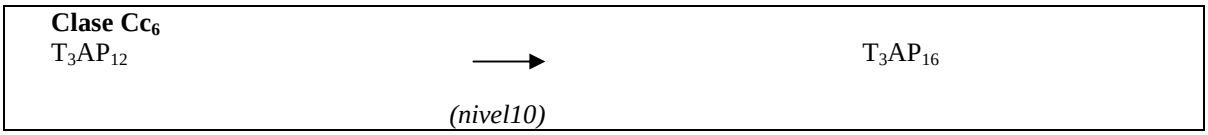
Las variables T_3AP_1 y T_3AP_3 que, con T_3AP_5 y T_3AP_{14} componían la clase [Cs_{11}] del árbol de similaridad, están también asociadas en el árbol jerárquico de cohesión por un nudo no significativo.



De la clase del árbol de proximidades [Cs_2], formada por T_3AP_2, T_3AP_{15}, T_3AP_7 y T_3AP_{18} conservan sólo T_3AP_7 y T_3AP_{18} su agrupación en el árbol jerárquico de cohesión. Aunque estas variables sigan agrupadas en el árbol jerárquico se puede observar en éste que no se agrupan con el resto de las de la clase [Cs_2]. La cadena que nos proporciona el árbol jerárquico de cohesión es:

La subclase del árbol de similaridad, [Cs_{32}], se subdivide, a su vez, en dos en el árbol jerárquico de cohesión, *Árbol 4*, {T_3AP_{13} y T_3AP_{19}} y {T_3AP_{12} y T_3AP_{16}} sin existir entre ellas cohesión implicativa. Esto es consecuencia de que su nivel en el árbol de similaridad era bajo (nivel 13 de 16). El nudo que relaciona T_3AP_{13} y T_3AP_{19} es el más significativo del árbol y, además, es el único nudo simétrico.





3.3.3 Conclusiones del análisis a posteriori del test Posterior de Contenidos Básicos.

La información proporcionada por el programa C.H.I.C nos permite afirmar:

Para todo tipo de funciones (constantes, lineales, …) los porcentajes medios de aciertos obtenidos por este grupo son mayores que 45% y, a diferencia del test previo T_2, estos porcentajes no son muy similares (Constantes 61%; Lineales 70%; Afines 45% y Cuadráticas 56%,).

Los peores resultados los han obtenido en las preguntas P_4 y P_{10}, unidas por el nudo de mayor significado del árbol de similaridad y P_6, P_{17} relacionadas con las dos anteriores en el nivel sexto. En todas ellas la solución era D (ninguna de las anteriores).

- Ha disminuido la dificultad cuando en el enunciado aparece el término "nº real" (P_{13} y P_{19}, preguntas asociadas por el nudo de nivel 3 en el árbol de similaridad, y un nudo significativo y además simétrico en el árbol jerárquico de cohesión).
- Manejan el paso de la expresión gráfica a la algebraica o viceversa, salvo cuando hay que reconocer si la función pasa por un cierto punto (P_{12} y P_3, unidas en el nivel 13 del Árbol de similaridad.
- Estos estudiantes-alumnos parecen conocer la "forma" de estas funciones (preguntas P_6 y P_{12} que aparecen relacionadas en el nivel 10).
- Han mejorado en las preguntas en las que se les solicita encontrar la imagen para un cierto original (P_5 y P_{15}) o aquellas en las que es necesario reconocer si la gráfica de la función pasa por el origen de coordenadas (P_8, P_9 y P_{13}, las dos primeras asociadas por el segundo nudo significativo).
- Igualmente, han mejorado en las preguntas en las que se pide la expresión analítica de la función, sea partiendo de la gráfica o de una expresión verbal (P_{17} y P_{16}, P_1 y P_{19}).
- En cambio, el rendimiento ha sido peor en alguna pregunta donde se cuestiona el corte con los ejes de coordenadas (P_6 y P_{17}, unidas en el nivel 2).
- Sucede lo mismo en preguntas en las cuales hay que identificar si la gráfica de la función pasa por un cierto punto (P_7, P_6 y P_{10}, las dos últimas asociadas en el nivel 6).
- Existe sólo una implicación con un nivel de confianza superior al 85%.

Esta doble implicación $P_{13} \longleftrightarrow P_{19}$, de nivel 1 e índice de cohesión 0,889, confirma que, aunque menor, sigue existiendo dificultad cuando en el enunciado aparece el término "nº real.

4 Comparación de los dos tests de Contenidos Básicos.

Anteriormente ya se expuso que las preguntas de los dos tests de Contenidos Básicos son idénticas y la diferencia radica exclusivamente en el orden de las mismas (en el test previo se presentaron en orden progresivo de dificultad y en el posterior al azar). Por tanto es necesario, como primera medida para la comparación de resultados, mostrar la equivalencia de las preguntas de ambos tests:

T_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
T_3	1	4	16	2	3	8	19	14	5	6	12	17	7	9	10	18	11	13	15

En este apartado cada pregunta la denotaremos según el orden del tercer test poniendo entre paréntesis el del segundo. Por ejemplo la pregunta número 15 del tercer test equivale a la número 19 del segundo, por consiguiente, la simbolizaremos de la siguiente manera: P_{15} (P_{19}).

La información que resulta de los parámetros estadísticos proporcionados por el programa C.H.I.C. confirma el aprendizaje tan satisfactorio que han realizado los alumnos de este grupo experimental en este tema de Funciones elementales ya que ha habido un aumento importante en los porcentajes de aciertos de las preguntas de los cuatro tipos de funciones: Constantes (del 35% al 61%), Lineales (del 36% al 70%), Afines (del 37% al 45%) y Cuadráticas (del 38% al 56%).

Sin embargo, de las diecinueve preguntas que forman los tests, ha disminuido el porcentaje de aciertos en tres: P_6 (P_{10}), P_{10} (P_{15}) y P_{18} (P_{16}).

En el enunciado de la pregunta P_6 (P_{10}) se puede que apreciar de las respuestas (B) y (C) muestran rectas de pendiente igual a f(x) pero que no pasan por puntos pertenecientes a esta función como, por ejemplo, el punto (0,5). Por tanto la respuesta correcta es la (D) Ninguna de las anteriores. En la pregunta P_{10} (P_{15}) la historia se repite, esta vez para una función de segundo grado.

Por último, como vemos en el propio enunciado de P_{18} (P_{16}) ya se plantea el paso por el punto (-5,25).

Esto nos conduce a concluir que los alumnos de este grupo experimental siguen sin poseer un deseable dominio en reconocer si un punto pertenece o no a la gráfica de una función (ya sea de primer o de segundo grado). En cambio, en las preguntas P_9 (P_{14}) y P_{12} (P_{11}) que se cuestiona el paso por el origen de coordenadas, el porcentaje de aciertos ha mejorado notablemente de 24% a 63% y de 47% a 81%, respectivamente.

En cuanto a peor porcentaje de aciertos, detrás de las preguntas mencionadas anteriormente, P_6 (P_{10}), P_{10} (P_{15}) y P_{18} (P_{16}), se encuentran P_4 (P_2) y P_{17} (P_{12}). Para contestar correctamente a estas preguntas se debe tener en

cuenta los cortes con los ejes de coordenadas; de ahí que en estas preguntas, a pesar de ser mejor contestadas en el test T_3, la mejoría ha sido ligera (de 18% en T_2 a 25% en T_3).

El numero de aciertos en las preguntas P_{13} (P_{18}) y P_{19} (P_7), en las que aparece el término "nº real", ha mejorado aceptablemente (de 18% y 29%, respectivamente, en T_2 a 56% en T_3).

Las preguntas mejor contestadas del test T_3 son: P_2 (P_4), P_{16} (P_3), P_{15} (P_{19}), P_7 (P_{13}), P_{12} (P_{11}) y P_8 (P_6). Salvo para la P_{15} (P_{19}), que es la más sencilla de todas, para acertar estas preguntas es necesario manejar el paso de la expresión analítica a la gráfica o viceversa de funciones constantes, lineales, afines y cuadráticas de vértice el origen de coordenadas, sin necesidad de comprobar si las funciones pasan por ningún punto. Se destaca el porcentaje de aciertos de las preguntas P_2 (P_4), P_{16} (P_3), P_7 (P_{13}) y P_8 (P_6) que es más del doble que en T_2.

En cambio, las preguntas peor contestadas han sido aquellas en las que la solución correcta era D (Ninguna de las anteriores), lo que refleja una gran inseguridad por parte de estos estudiantes-alumnos.

La observación, comparación y posterior análisis de los árboles de similaridad, Fig. 1 y 3, de los tests T_2 y T_3 nos permite afirmar que las dos clasificaciones obtenidas en ambos tests son bastante parecidas, en cuanto a los elementos de las clases obtenidas:

- La clase [Cs_{12}] del árbol de T_3, formada por las variables T_3AP_4, T_3AP_{10}, T_3AP_6 y T_3AP_{17} (correspondientes a las preguntas de respuesta correcta D), es también [Cs_{12}]de T_2 salvo la pregunta P_{10} (P_{15}).
- Las clases [Cs_{11}] y [Cs_{31}] de T_3 se agrupan, a excepción de P_{14} (P_8) y P_9 (P_{14}), para formar la clase [Cs_{11}] del árbol de T_2. Esta agrupación podría explicar que en el árbol jerárquico de cohesión de T_3 (Árbol 8.6) aparece un nudo significativo (nivel 7 de 10) que une ambas clases.
- Las variables T_3AP_{15}, T_3AP_7 y T_3AP_{18} de la clase [Cs_2] del árbol de T_3 (las preguntas de [Cs_2] relativas a funciones cuadráticas) forman junto a P_{14} (P_8) la clase [Cs_{22}] de T_2.
- Las variables T_3AP_{12}, T_3AP_{13} y T_3AP_{16} de la clase [Cs_{32}] del árbol de T_3 forman junto a P_2 (P_4) y P_{10} (P_{15}) la clase [Cs_{21}] de T_2.

Sin embargo, la clasificación obtenida en el test posterior parece más razonable. En ella aparece una clase, [Cs_1], que contiene la mayoría de las preguntas peor contestadas cuya solución era D y, además, las preguntas mejor contestadas (salvo la P_{16} (P_3)) son elementos de [Cs_2]. Asimismo, las preguntas en las que se cuestiona el paso por el origen están en la clase [Cs_3]. Y, por último, todas las preguntas en las que es necesario conocer uno de los cortes con los ejes de coordenadas (a excepción otra vez de la pregunta P_{16} (P_3)) pertenecen a la clase [Cs_1].

En cambio, los nudos, sobre todo los que son significativos, la situación en ambos tests es muy distinta.

En el test posterior, T_3, el primero y más significativo (nivel 1) de los nudos relaciona las variables de las preguntas P_4 (P_2) y P_{10} (P_{15}), sin embargo, éstas en el test previo, P_2 y P_{15}, ni siquiera pertenecen a la misma clase de similaridad. El siguiente nudo significativo de T_3 no se encuentra hasta el nivel 7 y asocia los aciertos de las preguntas P_8 (P_6) y P_9 (P_{14}). Las variables correspondientes de T_2, T2AP6 y T2AP14, aunque pertenecen a la misma clase [C_1] no se relacionan hasta el penúltimo nivel del árbol (16 de 17).

Análogamente, en el test posterior, T_2, el primero y más significativo (nivel 1) de los nudos relaciona las variables T2AP3 y T2AP4, sin embargo, éstas en el test posterior, P_{16} y P_2, tampoco pertenecen a la misma clase. El siguiente nudo significativo de T_2 (nivel 5) asocia las preguntas anteriores con P_{18}. La variable correspondiente de esta pregunta en T_3, T3AP13, aunque pertenece a la clase de la correspondiente a T2AP3, T3AP16, no se relacionan hasta el nivel 16.

Por tanto, estos resultados confirman que el progreso que se ha producido en los conocimientos de estos alumnos del grupo experimenta de 4º de E.S.O. en el tema de las funciones elementales ha sido bastante notable y podemos afirmar, con gran satisfacción por nuestra parte, que dicho cambio, además, ha sido muy positivo.

5 Conclusiones finales.

La focalización específica en la actividad que relacionan las gráficas y su expresión algebraica hacen que los alumnos maduren en esta idea primaria del conocimiento matemático.

Con todo se destaca la necesidad de una metodología continuada a lo largo del proceso educativo si se persigue una total comprensión del concepto de función, pues aún después de la reafirmación didáctica en esta dirección se encuentra un porcentaje nada desdeñable de estudiantes con errores.

Los porcentajes análogos, no dependientes de la complejidad de las funciones sobre las preguntas, demuestran errores más profundos en los mecanismos de pensamientos que no responden a los conceptos sino a

malas fundamentaciones de técnicas de razonamientos y sencillamente a una mala comprensión de las ideas matemáticas que sólo pueden ser subsanadas utilizando las nuevas definiciones en dos vertientes: Las de los objetos que introducen y las de los aprendizajes que tienen que incorporar a la forma de pensar del estudiante.

En las preguntas cuyo enunciado aparece en lenguaje cotidiano hay una similaridad en la respuesta y es que, a las dificultades anteriormente expuestas, se añade la de asociar las Matemáticas con el lenguaje coloquial. Podíamos explicarlos como una ruptura del contrato didáctico en las que el alumno supone que una pregunta matemática debe llevar un lenguaje propio, ajeno totalmente a las preguntas comunes. Este es un hecho que permanece durante todo el periodo educativo incluyendo, incluso, la formación superior en el que la forma de exponer las ideas parece tener que estar sometido a un lenguaje semilógico y críptico, pervirtiendo el sentido de la expresión de la idea y la idea y su significado.

Extrapolando el caso particular de las funciones al del aprendizaje general de las Matemáticas podemos concluir que muchas veces el estudio de las Matemáticas se reduce a un mero control de un lenguaje automático donde cualquier variación produce desconcierto por no estar sustentado por las ideas básicas que dicho lenguaje pretende comunicar.

Bibliografía

Álvarez Gayou, J.L. (2003): "Cómo hacer investigación cualitativa: fundamentos y metodología". Paidós.

Brousseau, G. y Lacasta, E. (1995): "L´Analyse statistique des situations didactiques. "Actes du Colloque Méthodes d´analyses statistiques multidimensionnelles en Didactiques des Mathématiques, ARDM, 53-107.

Chandon, J.L. y Pinson, S. (1981): "Analyse typologique. Théories et applications. " Masson. París.

Delgado, M. y otros (2005): "Modelización de una Unidad Didáctica: Modelo de Ingeniería didáctica para el estudio de las funciones elementales con ordenador." Actas Edumat 2005. Univ. Luján. Argentina.

Denzin, N.K. y Lincon, Y.S. (2000): "Handbook of qualitative research." Thousand Oaks. California.

Gras, R (1992): L´Analyse de données: une méthodologie de traitement de questions de didactique. Recherches en Didactique des mathématiques, vol 12, nº 1.

Gras, R y otros (1994): La methode d´analyse implicative en didactique. Applications vingt ans de didactique des mathématiques en France. La Pensée Sauvage. Grenoble.

Gras, R y otros (1996): "L´implication statistique. Nouvelle méthode exploratoire de données". La Pensée Sauvage. Grenoble.

Lerman, I.C. (1981): "Classification et analyse ordinale des données". Dunod.

Orús, P. y Pitarchi, I. (2000): Utilisation didactique des tableaux de données et du logiciel "CHIC" a l´école elementaire. " Actes des journées sur La fouille dans les données par la méthode d´analyse statistique implicative, Caen, 23-24 Junio 2000. Association pour la recherche en Didactique des Mathématiques.

Orús, P. (2002b): Tratamiento de datos, grafos y didáctica de las matemáticas. Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales, nº 26. Departamento de Matemáticas Fundamentales UNED.

Orús, P. y Gregori, P. (2005): "Des variables supplémentaires et des élèves «fictifs», dans la fouille didactique de données avec CHIC" Actas del 3º encuentro internacional ASI. Univ. Palermo. Italia.

Pitarchi, I. (2002): "Estudio sobre la viabilidad y el interés del tratamiento de la información en la ESO." Proyecto de investigación de 3º ciclo. Dpto. de Matemáticas. Univ. Jaime I. Alicante.

Ulecia, M.T. (2005): "Estudio de un caso de formación a distancia de profesores de Enseñanza Secundaria de Matemáticas". Tesis doctoral . UNED.

Summary.

The detection of the epistemological obstacles, as well as its origin and the way to face them, constitutes a paramount part in the study of the didactic fact, as it allows the elaboration of a methodology that provides a good response. The work establishes an initial characterization of these conflicts related to the elemental functions, an important part of the contents of the secondary education in Spain. The use of the C.H.I.C. is exposed to obtain an automation use of the information, which supports the teaching experience with an objective and global perspective, in the analysis of questionnaires carried out by second cycle of secondary education students. The article concludes showing off some difficulties that are presented in the study of these functions, some already known and which are, therefore, confirmed and others which for the authors represent a novelty.

Anexo

Los enunciados de las preguntas del cuestionario Previo de Contenidos Básicos están expuestos en la siguiente tabla :

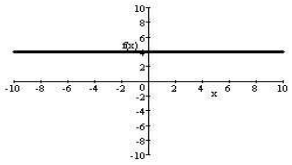
1. *¿Cuál de las expresiones algebraicas describe la expresión verbal "una función hace corresponder a cada número el número –1"?:*

(**A**) $f(x) = -1$ (**B**) $f(x) = -x$ (**C**) $f(x) = 1$. (**D**) Ninguna .

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones relativas a la gráfica de la función $f(x) = 4$ es correcta?

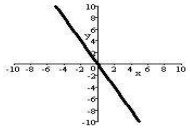
(A) Es una línea recta que corta a al eje OX en $x = 4$.
(B) Es una línea recta que corta a al eje OY en el origen.
(C) No es una línea recta.
(D) Ninguna.

3. *La expresión algebraica de la función $f(x)$ representada es:*



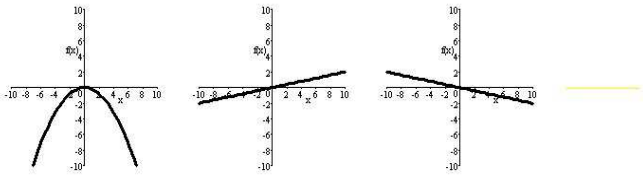
(**A**) $f(x) = 4$. (**B**) $f(x) = x + 4$. (**C**) 4. (**D**) Ninguna .

4. *¿Cuál de las siguientes afirmaciones relativas a la gráfica de una función es correcta?:*



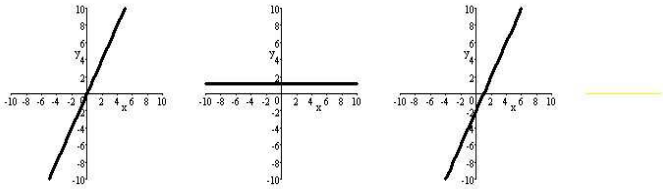
(**A**) La función es constante .
(**B**) La función es lineal .
(**C**) La función es afín .
(**D**) Ninguna .

5. *La gráfica de la función $f(x) = -\frac{1}{5}x$ es:*



(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) Ninguna

6. *La gráfica de la función $y = 2x$ es:*



(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) Ninguna

7. *¿Cuál de estas afirmaciones referidas a estas tres expresiones de funciones $f(x) = 2x$, "la función que hace corresponder a cada número real su doble", es correcta?:*

(**A**) Sólo dos de ellas son expresiones de la misma función .
(**B**) Son las tres expresiones de la misma función .
(**C**) Son expresiones de tres funciones distintas .
(**D**) Ninguna .

8. *Elige la expresión algebraica de la función f que cumple la siguiente tabla de valores*

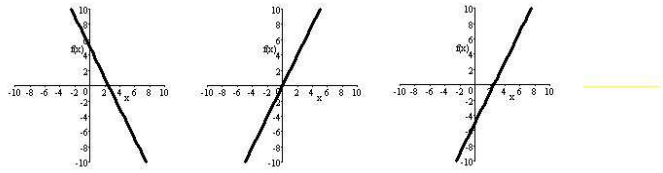
x	5	–4
$f(x)$	25	20

(**A**) $f(x) = 5x$. (**B**) $f(x) = 3x$. (**C**) $f(x) = 3x + 5$. (**D**) Ninguna .

9. *La variable y expresada en función de x se escribe como $y = 1 - x$. ¿Cuál de afirmaciones es correcta?*

(**A**) A $x = -5$ le corresponde $y = 6$.
(**B**) A $x = -5$ le corresponde $y = -4$.
(**C**) A $x = -5$ le corresponde $y = -6$.
(**D**) Ninguna .

10. *La gráfica de la función $f(x) = 2x + 5$ es:*

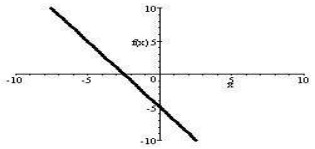


(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) Ninguna

11. *La gráfica de la función $f(x) = x + \frac{1}{2}$ verifica*

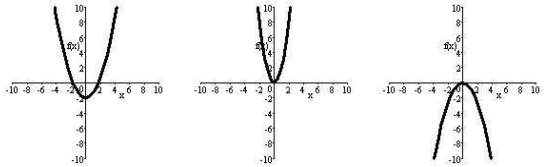
(**A**) Es una recta que pasa por el origen .
(**B**) No es una recta .
(**C**) Es una recta que no pasa por el origen .
(**D**) Ninguna .

12. *Elige un número b para que la gráfica de la función: $f(x) = -2x + b$ sea*



(**A**) $b = 3$. (**B**) $b = -3$. (**C**) $b = 0$. (**D**) Ninguna .

13. *¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la de la función* $f(x) = 2x^2$*?:*

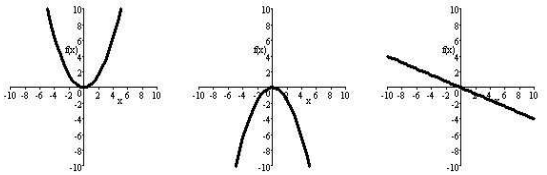


(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) Ninguna

14. *La gráfica de la función* $y = -3x^2$ *tiene forma de:*

(**A**) Línea recta que pasa por el origen de coordenadas .
(**B**) Parábola que no pasa por el origen de coordenadas .
(**C**) Parábola que pasa por el origen de coordenadas .
(**D**) Ninguna .

15. *¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la de la función* $f(x) = -\frac{3}{4}x^2$*?:*

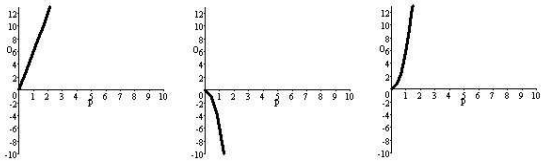


(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) Ninguna

16. *La gráfica de la función f es una parábola que pasa por el punto P(–5, 25). ¿Cuál de las siguientes expresiones se refiere a esta función?:*

(**A**) $f(x) = -5x^2$. (**B**) $f(x) = x^2$. (**C**) $f(x) = -5x$. (**D**) Ninguna .

17. *La oferta de unos zapatos viene expresada por la siguiente función del precio:* $O = 6p^2$*. La gráfica que relaciona estas variables es:*



(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) Ninguna

18. *Una función hace corresponder a cada número real su cuadrado. ¿Cuál de estas afirmaciones es correcta?:*

(**A**) La gráfica de esta función es una línea recta.
(**B**) La gráfica de esta función es una parábola abierta hacia abajo que pasa por el origen de coordenadas .
(**C**) La gráfica de esta función es unaparábola abierta hacia arriba que no pasa por el origen de coordenadas .
(**D**) Ninguna .

19. *La función que asocia a cada lado (l) el área del cuadrado (A)* $A = l^2$*. ¿Qué área tiene un cuadrado de lado 3 cm?*

(**A**) $6cm^2$. (**B**) $9cm^2$. (**C**) $3cm^2$. (**D**)