Prévision et communication de valeurs par le graphique

Eduardo Lacasta *, Miguel R. Wilhelmi **

Departamento de Matemáticas, Universidad Pública de Navarra, 31006 Pamplona (España)
* elacasta@unavarra.es, ** miguelr.wilhelmi@unavarra.es

Résumé. Nous proposons aux élèves du secondaire un questionnaire dont le but est d'analyser le rôle adidactique du graphique. Dans cette expérimentation on éprouvera la capacité des élèves, en rapport avec le graphique cartésien des fonctions, à : 1) prévoir des résultats, 2) représenter et à communiquer certaines situations ou certaines propriétés, et 3) à interpréter des informations posées graphiquement. Les données ont été explorées préalablement par le biais de l'analyse factorielle (ACP et AFC). Les modèles dérivés de cette analyse préliminaire ont été confrontées à une analyse implicative ultérieure.

1 Buts du questionnaire. Hypothèses envisagées

Le but de ce travail est d'analyser le rôle *adidactique* du graphique cartésien des fonctions (GCF), c'est-à-dire, le milieu matériel GCF permet à l'élève :

« … [des] adaptations souhaitées, par un choix judicieux, des 'problèmes' que [le maître lui] propose. Ces problèmes, choisis de façon à ce que l'élève puisse les accepter doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître. L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques. Non seulement il le peut, mais il le doit aussi car il n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en œuvre de lui-même dans des situations qu'il rencontrera en dehors de tout contexte d'enseignement et en l'absence de toute indication intentionnelle. Une telle situation est appelée situation adidactique.» (Brousseau, 1998, 59).

Dans cette expérimentation on éprouvera la capacité des élèves, en rapport avec le GCF, à :
- prévoir des résultats,
- représenter et à communiquer certaines situations ou certaines propriétés, et
- interpréter des informations posées graphiquement.

En même temps nous voulons déterminer :
- s'il se produit un apprentissage de ces capacités le long de la scolarité du secondaire,
- quelle peut être l'influence dans le comportement de l'élève des renseignements iconiques, et
- quel peut être le comportement des élèves face à des fonctions à variable temporelle.

Les données ont été explorées préalablement par le biais de l'analyse factorielle. Les modèles dérivés de cette analyse préliminaire ont été confrontées à une analyse implicative ultérieure (Gras, 1996). Pour étudier les interdépendances et les implications entre les objectifs d'étude nous avons effectué plusieurs analyses multivariables, en utilisant le logiciel CHIC pour la classification hiérarchique, implicite et cohésive (Couturier et Gras, 2005).

1.1 La prévision de résultats dans les fonctions

La notion de fonction au sens moderne permet d'étudier des relations entre des variables dont l'idée d'anticipation est absente ; mais pour Lagrange, les fonctions ont nécessairement une expression algébrique qui permet de prévoir à un moment donné les valeurs d'une variable quand on connaît l'autre. Il existe des fonctions telles que rien ne permet de prévoir quelles sont les valeurs que la fonction va prendre pour des valeurs de la variable supérieures à une valeur donnée. Ce genre de fonctions a été considéré absolument inutile pendant longtemps dans l'histoire des mathématiques.

Quand les professeurs veulent justifier les fonctions chez les étudiants, ils prennent la notion de fonction la plus large, qui est justifié par les études sur la notion de continuité et autres notions. L'exemple de la courbe de la température d'un malade par rapport au temps est tout à fait différent de celui d'une fonction pour laquelle il y a une possibilité de prédiction du comportement. Il y a une grande distance épistémologique entre ces types de fonctions, mais la différence entre eux n'est pas marquée dans le milieu scolaire.

L'analyse de données est pertinente pour l'étude des faits didactiques quantifiés et pour formuler et pour contraster des hypothèses (Gras, 1992, 2005). Nous espérons donc avoir des résultats empiriques qui nous permettent de répondre aux hypothèses énoncées plus bas.

1.2 Hypothèses

Le temps comme variable est la base de conceptions diverses des fonctions où le vocabulaire spatial ne s'applique pas et où le problème de l'interprétation des graphiques devient différent. Par conséquent le rôle joué par le graphique dans la construction de l'analyse mathématique peut être traité sous une perspective différente (rappelons les constructions de Newton et Leibniz) lorsque la variable est le temps, mais ceci n'est pas l'objet de ce travail.

Malgré tout, il est intéressant d'analyser la capacité des élèves à construire et à interpréter le graphique d'une fonction dont la variable est le temps (ce qui est fait dans les questions 1, 2 et 4) et la capacité des mêmes élèves à travailler avec les fonctionnalités spatiales du graphique et de l'icône visées dans la question 3.

Voici les hypothèses émises sur le graphique par rapport à la prévision, à la représentation et à la communication de situations :

- Hypothèse H1 : Si les élèves sont capables de réussir aux situations d'extrapolation, alors ils maîtrisent la représentation graphique de fonctions périodiques.
- Hypothèse H2 : Si les élèves peuvent prévoir le comportement d'une fonction donnée par le biais d'une information textuelle, pour une valeur quelconque du domaine (de la variable *t* temps), alors ils sont capables de représenter graphiquement la fonction.
- Hypothèse H3 : Si les élèves résolvent des tâches mathématiques, ils sont donc capables de résoudre de tâches du même ordre posées iconique ou graphiquement.
- Hypothèse H4 : Les élèves pensent que l'on peut acquérir des connaissances suffisantes sans le savoir, par l'image.

2 Le questionnaire et le plan d'expériences : connaissances mathématiques, composantes du graphique envisagées et questions

Les connaissances mathématiques envisagées sont les suivantes : extrapolation (ext), division euclidienne (div), intersection de fonctions (ins) et comparaison de fonctions (com). Ces connaissances forment l'ensemble CM = {ext, div, ins, com} (connaissances mathématiques).

Les techniques d'extrapolation par approche linéaire ou autres ne sont pas à portée des activités entreprises normalement dans le secondaire obligatoire. Au lieu de définir une fonction par sa formule, nous avons choisi une fonction empirique et nous avons pris la périodicité de la fonction comme un caractère susceptible d'être utilisé dans les niveaux du secondaire obligatoire pour analyser la capacité des élèves à concevoir l'extrapolation d'une fonction. Le choix de la périodicité a introduit la division euclidienne comme connaissance en jeu.

L'intersection et la comparaison de fonctions sont présentes pour des fonctions à variable temporelle.

Dans les questions, l'information est donnée sous la forme d'un icône (I), d'un graphique cartésien (G) et d'un texte (Tx). Ces moyens d'information donnent l'ensemble F = {I, G, Tx}.

L'usage du graphique cartésien comme abaque est codé "A", c'est-à-dire, comme dispositif matériel permettant de trouver sur une échelle la valeur de « *y* » pour une valeur de « *x* » donnée (abaque directe) et vice versa (abaque indirecte), et le caractère temporel des fonctions traitées dans les questions est codé "t".

Le choix des questions est restreint aux 14 questions ponctuelles, groupées en 4 questions générales. Les 14 sous-questions recueillent les connaissances et composantes du graphique plus haut explicitées. Le texte du questionnaire est sur l'annexe 1.

3 Constitution de l'échantillon. Déroulement

Pour pouvoir analyser l'effet du niveau scolaire sur les résultats, nous avons fait deux passations du questionnaire. La première est réalisée á des élèves de 15-16 ans (33 élèves, filière unique) et la deuxième á des élèves de 17-18 ans (19 élèves, filière littéraire).

Le choix du niveau 15-16 ans est déterminé par le souci d'éviter les absences de réponse, qui peuvent être nombreuses dans les niveaux inférieurs pour les contenus mathématiques posés. Nous avons choisi les élèves de 17-18 ans pour avoir un écart suffisant des différences dues au niveau scolaire.

Dans tous les cas la passation est faite pendant l'horaire scolaire et on a communiqué aux élèves que les résultats de la preuve seront tenus en compte par le professeur dans l'évaluation.

4 Matrice active : les variables contingentes

4.1 Les variables

Certaines des questions ponctuelles décrites ci-dessus ont été réussies par tous les élèves, alors que d'autres ont subi quelques problèmes dans la saisie des données. Les réponses à la question 5 font appel aux représentations qui ont les élèves des graphiques et des icônes. C'est la raison pour laquelle nous n'avons pris en compte finalement que 14 questions ponctuelles dont les réussites définissent les variables binaires (1 pour réussite, 0 pour échec) ci-dessous :

R11, R12, R13 : Réussites aux sous-questions 1.1., 1.2., 1.3.

R21 : Réussite à la représentation graphique du comportement des trois systèmes de douche automatique. La réponse doit être un graphique comme celui de la figure 1.

R22 : Réussite à la sous-question 2.2. (donner les valeurs de t = 25, 35, 45… et éventuellement 0).

R23 : Réussite à la sous-question 2.3. (donner une valeur quelconque entre 10 et 15 s.).

R24 : Réussite à la sous-question 2.4. (donner une valeur quelconque entre 5 et 10 s. et la valeur t = 15).

R25 : Réussite à la sous-question 2.5. (donner un intervalle entre t = 0 et une valeur entre 5 et 10).

R26 : Réussite à la sous-question 2.6. (donner un intervalle entre deux valeurs de t compris entre 5 et 15).

R31 : Réussite à la sous-question 3.1. (donner le graphique de la fonction S(x) = 2x).

R41 : Réussite à la sous-question 4.1. (donner les valeurs t = 0 et t = 60).

R42 : Réussite à la sous-question 4.2. (description des mouvements des mobiles A et B avec explicitation du comportement de la vitesse et des temps d'arrêt et de retour).

R43 : Réussite à la question 4.3. (donner le mobile A et les intervalles [0 ; 10] et [10 ; 30]).

R44 : Réussite à la sous-question 4.4. (donner le mobile A).

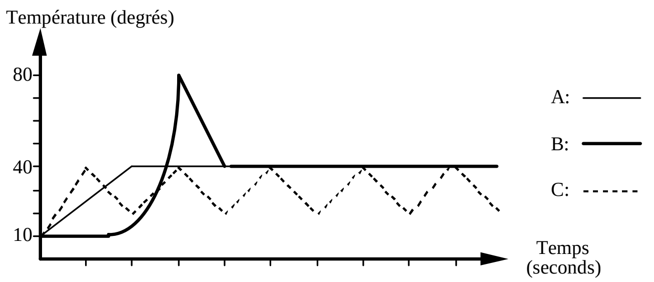
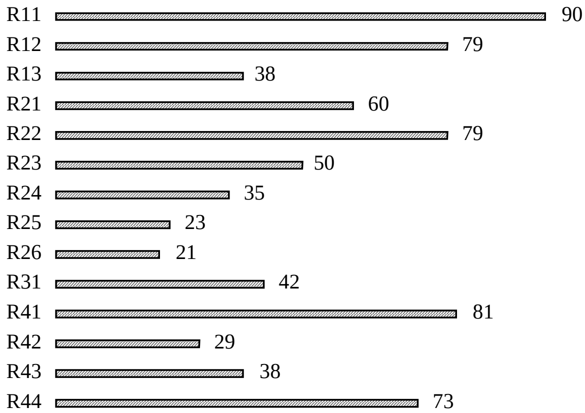


FIG. 1 - Corrigé de la réponse à la question 2 du questionnaire

Puisque le nombre total d'élèves qui ont répondu au questionnaire est de 52, la dimension de la matrice des variables contingentes est : 52 x 14. Notre décision est de choisir cette matrice comme active pour les analyses factorielles. C'est elle qui va définir les vecteurs et valeurs propres. Les variables et caractères des matrices explicatives vont se situer par rapport à la contingence définie par la matrice active.

4.2 Histogramme des réussites. Difficulté des questions

Une classification arbitraire des questions selon leur difficulté peut nous donner quelques indications dans une première approche ; classification dont les résultats peuvent être trompeurs, puisqu'on n'a pas réalisé des test d'hypothèses et certaines différences peuvent être dues au hasard.



Légende :
Rij : réussite à la question "i.j" du questionnaire.
Le nombre qui est au bout des barres est le pourcentage de la réussite respective.

FIG. 2 - *Histogramme des pourcentages des réussites aux questions du questionnaire*

Questions faciles (taux de réussite supérieurs à 70%)

Questions 1.1 et 1.2 (qui peuvent être résolues par extrapolation explicite sur le graphique et lecture comme abaque direct). Question 2.2 (qui peut être une réponse ponctuelle par interprétation directe du texte, sans construction graphique). Question 4.1 (qui peut être résolue par intersection des fonctions, même si leurs graphiques sont interprétés de façon erronée, comme des trajectoires par exemple). Question 4.4 (qui peut être résolue par lecture du graphique comme abaque indirect).

Questions à difficulté moyenne (taux de réussite entre 40 et 70%)

Question 2.1 (elle est résolue par 60% des élèves, même si ce n'est pas une question habituelle dans l'enseignement et même si les graphiques ont une certaine complexité ; il s'agit d'un résultat assez étonnant). Question 2.3 (lecture comme abaque du graphique de la question 2.1). Question 3.1 (42% des élèves sont capables de se dégager de la représentation iconique pour abstraire la fonction S(x) et donner son graphique correctement).

Questions difficiles (taux de réussite inférieurs à 40%)

Question 1.3 (seulement 38% des élèves trouvent un procédé quelconque, comme la division euclidienne ou procédés numériques divers, pour résoudre cette question en dehors du graphique). Question 2.4 (35% font une lecture ponctuelle du graphique trouvé dans la question 2.1). Question 4.2 (29% des élèves interprètent convenablement (retour en arrière, vitesse…) un diagramme e-t). Les questions les plus difficiles sont 2.5 et 2.6 qui exigent des raisonnements sur intervalle.

5 Les matrices explicatives. Analyse "a priori"

Voici les types de procédé suivis dans la résolution de la question 1 :

1p4 : Détermination de la période 4 par observation du graphique, division de "t" par 4 et calcul de la valeur de l'intensité du son par comptage du reste. Nous avons noté la valeur "1" lorsque ce procédé est utilisé pour répondre au moins aux sous-questions 1.1 et 1.2 et la valeur "0" lorsque le procédé n'est pas utilisé.

1eg : Calcul par extrapolation graphique. Valeur “1” si l’élève continue le dessin du graphique jusqu’à ce que la valeur de t atteigne 23 sec. Donc, nous avons noté la valeur “1” lorsque ce procédé est utilisé au moins pour répondre aux sous-questions 1.1 et 1.2.

1cp : Détermination de la valeur demandée par comptage (un à un ou quatre à quatre) sur le graphique ou sur un tableau élaboré exprès, au moins dans les sous-questions 1.1 et 1.2.

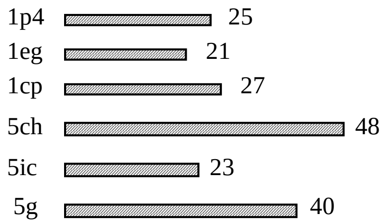
1tb : Construction d’un tableau de valeurs de la fonction donnée.

Les comportements repérés dans le choix des questions trouvées plus faciles par les élèves sont :

5ch : Cohérence de la réponse de l’élève avec ses résultats. Valeur “1” si la question estimée la plus facile est globalement réussie par l’élève.

5ic : Incohérence de la réponse de l’élève avec ses résultats. Valeur “1” si la question estimée la plus facile n’est pas globalement réussie par l’élève[1].

5g : La raison de la facilité de la question choisie est l’interprétation facile de son graphique.



Légende :

Le nombre qui est au bout des barres est le pourcentage de la réussite respective ou de la réalisation du comportement respectif.

1p4 : Détermination de la période 4 par observation du graphique.
1eg : Calcul par extrapolation graphique.
1cp : détermination de la valeur demandée par comptage.
5ch : cohérence de la réponse de l’élève sur les questions les plus faciles à son avis, avec ses résultats.
5ic : incohérence de la réponse de l’élève sur les questions les plus faciles à son avis, avec ses résultats.
5g : la raison de la facilité de la question choisie est l’interprétation facile de son graphique.

FIG. 3 - *Histogramme des procédés et comportements dans les questions 1 et 5 du questionnaire*

Les différences entre les taux de réussite peuvent être dues au hasard. Néanmoins il est à souligner que presque la moitié des élèves font des choix cohérents avec leur résultats et que 40% des élèves déclarent que la raison de leur choix est la facilité d’interprétation du graphique. Est-ce que les élèves répondant aux comportements *5ch* et *5g* sont-ils les mêmes ? Quelle est la place de ces variables par rapport à la contingence et par rapport aux autres variables explicatives ?

L’analyse de données peut nous donner des réponses aux questions posées, l’intérêt des variables attachées à la question 5 sera mis en relief au paragraphe 7.

Voici les caractères explicatifs des situations :

Les connaissances mathématiques et les composantes du graphique sont : A (abaque), t (temps), l’ensemble de formes de présentation de l’information F = {I (icône), G (graphique), Tx (texte)} et l’ensemble de connaissances mathématiques {ext (extrapolation), div (division euclidienne), ins (intersection de fonctions), com (comparaison de fonctions)}.

Les 14 variables réussite-échec relevées permettent de montrer l’effet de ces caractères explicatifs liés aux situations. La matrice a priori du tableau 1 indique la réalisation ou non de chaque caractère binaire pour chacune des 14 questions.

La vérification des dépendances a priori consiste à examiner la liaison entre les variables explicatives indépendamment de la contingence à expliquer.

[1] Nous avons choisi les deux variables 5ch et 5ic au lieu d'une seule, parce que un certain nombre d’élèves n'a pas répondu à la question 5. Ainsi, les valeurs possibles pour le couple sont (1, 0), (0, 1) et (0, 0).

Les caractères “t” (temps) et “A” (selon l’analyse ACP, AFC) sont liés entre eux. Il en est de même pour les caractères “ext” (extrapolation) et “div” (division). Il y a aussi une certaine liaison entre les caractères “I” (icône) et “G” (graphique). Les autres caractères : “ins” (intersection de fonctions), “com” (comparaison de fonctions) et “Tx” (texte) sont relativement indépendants.

	R11	R12	R13	R21	R22	R23	R24	R25	R26	R31	R41	R42	R43	R44
I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
G	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
Tx	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
ext	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
div	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ins	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0
com	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
t	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
A	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1

Légende :
Rij : réussite à la question “i.j” du questionnaire
I : l’information donnée dans la question est sous la forme d’un icône.
G : l’information donnée dans la question est sous la forme d’un graphique.
Tx : l’information donnée dans la question est sous la forme d’un texte.
ext : présence dans la question de connaissances sur l’extrapolation.
div : présence dans la question de connaissances sur la division euclidienne.
ins : présence dans la question de connaissances sur l’intersection de fonctions.
com : présence dans la question de connaissances sur la comparaison de fonctions.
t : présence dans la question de fonctions à variable temporelle.
A : le graphique doit être utilisé comme abaque pour répondre à la question.
La dimension de la matrice explicative des caractères liés aux situations est donc 9 x 14.

TAB 1 – Matrice des caractères explicatifs liés aux situations, envisagés “a priori”, du questionnaire

6 Analyse de la contingence et confrontation avec les variables explicatives

Voyons maintenant l’effet de la contingence, c’est-à-dire, l’effet des résultats des élèves, sur les liaisons entre les 9 caractères explicatifs.

Les liaisons et écarts trouvés dans les ACP *a priori* et *a posteriori*, c’est-à-dire, avec l’intervention des résultats des élèves sont exposés dans le tableau 2.

Dans les deux analyses, les caractères explicatifs des situations *Tx* (texte), *ins* (intersection) et *I* (icône) apparaissent écartés dans les matrices a priori et liés dans la matrice analysée a posteriori. C’est-à-dire, que ce sont les élèves qui ont lié ces caractères et cette liaison {Tx, ins, I} est un fait que nous soulignons et que nous pouvons interpréter comme ci : la présence d’un texte et d’un icône explicatifs est liée par les élèves au calcul d’intersections de fonctions. Par contre, le graphique n’est pas lié à ce calcul.

	A priori	A posteriori
Liaisons	{A, t}, {ext, div}, {I, G}	{A, t}, {com, I}, {I, Tx, ins}, {A, Tx}
Ecarts	{I, Tx, ins}, {A,Tx}, {com, I}	{ext, div}

Légende :
I : l’information donnée dans la question est sous la forme d’un icône.
G : l’information donnée dans la question est sous la forme d’un graphique.
Tx : l’information donnée dans la question est sous la forme d’un texte.
ext : présence dans la question de connaissances sur l’extrapolation.
div : présence dans la question de connaissances sur la division euclidienne.
ins : présence dans la question de connaissances sur l’intersection de fonctions.
com : présence dans la question de connaissances sur la comparaison de fonctions.
t : présence dans la question de fonctions à variable temporelle.
A : le graphique doit être utilisé comme abaque pour répondre à la question.

TAB 2 – Liaisons et écarts des caractères explicatifs des situations "a priori" et "a posteriori" dans le questionnaire

Dans la représentation du plan 1-2 de l'AFC a posteriori, le seul caractère lié au caractère "com" (comparaison de fonctions) est "Tx". Par conséquent, c'est la présence d'un texte explicatif qui est liée, par les comportements des élèves, à la comparaison de fonctions et non pas la présence du graphique cartésien ou d'un icône.

Le caractère "A" (attaché aux questions dont la résolution exige l'utilisation du graphique comme abaque) est lié par les réponses des élèves au caractère "Tx". Autrement dit, l'usage du graphique comme abaque est lié par les élèves à la présence d'un texte explicatif de la fonction. Par contre, le couple (A, t) est lié a priori et a posteriori. La liaison entre A et t est donnée par définition des caractères. Donc, nous ne pouvons pas déterminer si les résultats des élèves ont aussi influencé la liaison.

Le couple (div, ext) qui est lié dans l'analyse a priori est plus séparé lors de l'intervention des élèves, puisqu'il s'agit de deux procédés alternatifs pour la résolution des sous-questions 1.2. et 1.3.

Le fait que les questions soient posées par l'intermédiaire d'un graphique cartésien (G), ne semble pas jouer un rôle dans l'efficacité à résoudre les problèmes de comparaison de fonctions (com) et de calcul des intersections (ins).

6.1 Confrontation à la contingence des variables explicatives des élèves. Analyse en composantes principales (ACP)

Les sous-questions 3.1. (expression graphique cartésienne de l'aire de la voile en fonction de la longueur de la bôme du bateau) et 4.1. (calcul des instants durant lesquels les positions des deux mobiles de la question 4 coïncident) sont les plus identifiées à la réussite scolaire en mathématiques dans le plan 1-2 de l'ACP de la matrice "a posteriori" et il paraît que l'interprétation de diagrammes cartésiens espace-temps et la représentation cartésienne de fonctions exprimées par des renseignements divers (texte explicatif et icône) sont des tâches familières aux élèves.

La réussite à l'exercice (REU)[2] ne discrimine pas les élèves appartenant à la classe de 15-16 ans (U) et ceux appartenant à la classe de 17-18 ans (L). Néanmoins, on observe (à l'ACP) que:

les élèves de 15 ans (U) sont caractérisés par a) l'expression du graphique en tant qu'idéogramme (sans repérage ni échelles) dans la réponse à la sous-question 3.1. (31D) et b) l'utilisation de l'extrapolation graphique dans la question 1 (*1eg*).

les élèves de la classe de 18 ans (L) sont caractérisés par a) l'illusion de l'icône comme représentation cartésienne dans la réponse à la sous-question 3.1. (31I, indice de l'illusion de l'acquisition de connaissances sans le savoir par l'image) et b) le choix des questions comportant le temps comme variable comme les plus faciles. Il faut souligner que ce choix n'est pas justifié par une maîtrise particulière de l'interprétation de fonctions temporelles, puisque le caractère des situations *t* (temps) est opposé (AFC a posteriori) aux classes U et L.

En effet, l'observation directe des occurrences des variables nous donne le tableau 3.

Il paraît donc qu'il n'y a pas un effet de l'apprentissage en termes de réussite à l'exercice, pour les élèves de 17-18 ans de la filière littéraire, mais une spécialisation à tort dans l'illusion de l'acquisition de connaissances sans le savoir par l'image.

---

[2] La valeur est la moyenne des réussites aux questions du questionnaire. Autrement dit, c'est la moyenne des valeurs obtenues pour les 14 variables actives : R11, R12, R13, R21, R22, R23, R24, R25, R26, R31, R41, R42, R43 et R44.

Filière	Nombre d'élèves	31I	31D
U	33	0	7
L	19	6	1

Légende :
31I : donner comme réponse à la question 3.1 la représentation iconique de la voile sur les axes coordonnés.
31D : donner comme réponse à la question 3.1 le graphique de la fonction y = x, sans échelles.
U : classe de 15-16 ans (filière unique).
L : classe de 17-18 ans (filière littéraire).

TAB 3 – Occurrences par classes de variables relevant l'usage du graphique comme idéogramme et la contamination de l'icône dans le graphique

6.2 Influence de l'iconicité sur les préférences des élèves

Les élèves en lettres de 17-18 ans choisissent à tort les questions d'interprétation de diagrammes espace-temps comme les plus faciles. Lors de la passation du questionnaire, les caractères L (filière littéraire) et 5g ("les graphiques sont très faciles à interpréter") sont liés, mais en même temps, le caractère temporel (t) est opposé à L. Ce résultat peut être interprété de la manière suivante : « L'idéologie de l'iconicité conduit les étudiants à faire de mauvais choix dans les solutions ».

Ce sont seulement les élèves de 15-16 ans qui font un usage du graphique comme idéogramme et, en même temps, prévoient les valeurs d'une fonction périodique par extrapolation graphique. Notre attente était que l'usage idéogramme exige de la part des élèves une certaine maturité. Par contre, ce résultat empirique –qui est accompagné d'un manque de maîtrise dans la résolution des problèmes, puisqu'ils n'appliquent pas des procédés simples, comme la division euclidienne– falsifie la conjecture "seulement les élèves des niveaux supérieurs (17-18 ans) arrivent à utiliser le graphique comme idéogramme dans leurs explications".

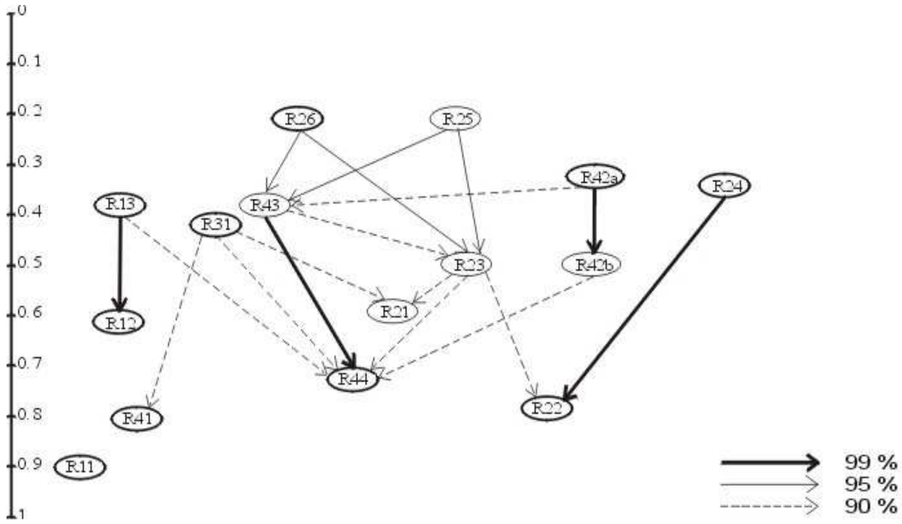
6.3 Analyse implicative

Les variables explicatives liées aux élèves pourraient être traitées comme des variables actives, puisqu'elles sont définies à partir des réponses au questionnaire. Or, cette analyse est appliquée à la matrice des réussites aux questions (à dimension 52 x 14) ; d'une part, la définition des variables est faite par des critères qui peuvent être discutables du point de vue de la fidélité des données à la contingence et d'autre part la mise en compte d'un assez grand nombre de variables explicatives dans la matrice contingente aurait pu alourdir l'analyse.

Rappelons que les implications de la "hiérarchie implicative des classes pour la matrice des réussites aux questions du questionnaire" s'établissent entre de classes déjà ordonnées en leur sein. L'arbre hiérarchique, fournit par le logiciel CHIC, relève que la présence d'un graphique cartésien dans l'énoncé (EG) n'implique que très faiblement –dans un seul cas– des réussites à d'autres questions. D'ailleurs, la réussite à la construction d'un graphique cartésien (IG) implique aussi faiblement d'autres réussites. Donc, nous ne pouvons pas affirmer que le graphique puisse jouer un rôle fondamental dans la communication, la reproduction et la prévision de situations diverses.

Le graphe implicatif (fig. 4) nous donne des informations additionnelles. Par exemple:

- La variable R11 est isolée. Il n'y a pas d'implication ni de transitivité avec les variables R12 ou R13, bien que le comportement relevé par R11 suppose aussi une extrapolation. L'explication la plus plausible c'est que la réussite à la question 1.1, plutôt qu'une extrapolation, n'exige qu'une lecture ponctuelle de la graphique donnée, à un petit prolongement près.
- Le taux de réussite à la question R21 est de 60%. Les trois types d'erreurs plus fréquemment associées à la question 2.1 (représentation graphique) sont : 1) l'origine O des axes est pris comme l'origine des graphiques (l'eau commence à sortir selon les graphiques à 0º), 2) les graphiques contiennent des traits verticaux et 3) le changement de pente de la graphique du système B est substitué par une pente constante les 15 premiers secondes ou par d'autres pentes qui ne sont pas d'accord avec l'énoncé.



Légende :
Rij : réussite à la question "i.j" du questionnaire.

FIG. 4 – Graphe implicatif

- L'analyse clinique des réponses soulève que les erreurs les plus fréquentes sont « confusion entre vitesse et accélération » (question 4) et « des réponses ponctuelles quand un intervalle est sollicité » (question 2). Le graphe implicatif permet de sa part affirmer que : 1) la fréquence de R43 est plus grande que la fréquence R25, bien que la tâche 2.5 (lecture d'une graphique par des intervalles) pourrait être considérée plus simple que la tâche 4.3 (détermination de la pente d'une fonction linéaire) et 2) les élèves qu'ont résolu les questions 2.5 et 2.6 sont majoritairement (95%) capables de résoudre la question 4.3.

Nous établirons ci-dessous d'autres résultats empiriques fournis par le graphe implicatif.

7 Confrontation des résultats empiriques avec les hypothèses

1. L'ensemble des élèves capables de construire la graphique d'une fonction périodique, donné par le biais d'une information textuelle (R21), ne sont pas souvent capables de prévoir son comportement pour une valeur quelconque de la variable *t* temps (R22). Ce fait contredit l'hypothèse H1 (« Si les élèves sont capables de réussir aux situations d'extrapolation, alors ils maîtrisent la représentation graphique de fonctions périodiques »).
2. La fréquence de la variable R22 est plus grande que celle de la variable R21 ; c'est donc l'interprétation textuelle de l'énoncé et non celle de la représentation graphique la cause de la réussite à la question 2.2. Ceci contredit l'hypothèse H2 (« Si les élèves peuvent prévoir le comportement d'une fonction donnée par le biais d'une information textuelle, pour une valeur quelconque du domaine, alors ils sont capables de représenter graphiquement la fonction »).
3. La réussite aux questions posées iconique ou graphiquement (voir la table 2) est indépendant de la réussite aux tâches mathématiques intersection et comparaison de fonctions. Ce fait contribue à falsifier l'hypothèse H3 (« Si les élèves résolvent des tâches mathématiques, ils sont donc capables de résoudre de tâches du même ordre posées iconique ou graphiquement »).
4. Les élèves en lettres de 17-18 ans justifient leurs choix des questions les plus faciles, parce que selon eux, **"**les graphiques sont très faciles à interpréter**"** et, en même temps, certains d'entre eux placent l'icône du problème dans le plan cartésien, au lieu d'abstraire la formule de la fonction demandée et de la représenter. Ces élèves, influencés par leur idéologie iconique, placent directement le dessin de la voile d'un petit bateau (fig. 5) dans le plan cartésien, sans se rendre compte de la différence qui existe entre l'icône et le graphique de la fonction. Ce fait vient valider l'hypothèse H4 (« Les élèves pensent que l'on peut acquérir des connaissances suffisantes sans le savoir, par l'image »).

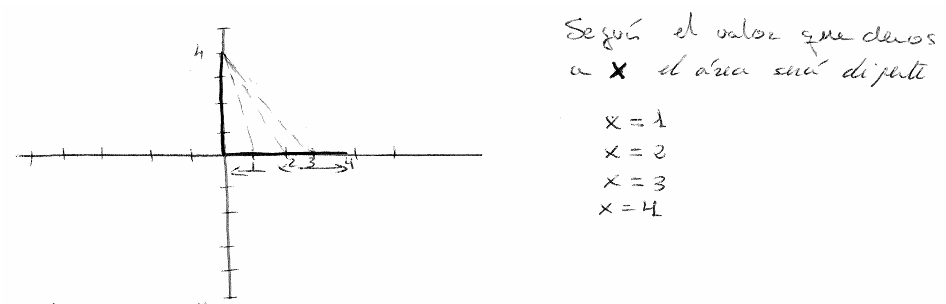


FIG. 5 - Représentation de l'icône de la voile sur le plan cartésien faites par un élève (17-18 ans, filière L)

5. Les élèves en lettres de 17-18 ans présentent une spécialisation de l'illusion de l'acquisition de connaissances sans le savoir par l'image, par rapport aux élèves de 15-16 ans (voir table 3). La réussite générale (REU) au questionnaire est indépendante des caractères U (classe de 15-16 ans) et L (classe de 17-18 ans, filière littéraire) ; c'est-à-dire, les élèves appartenant à L ne sont pas plus performants que ceux à U, mais ils sont rassurés sur les vertus de l'iconique et du graphique, tous deux confondus, ce qui vient aussi valider l'hypothèse H4.

8 Résultats empiriques inattendus

i) Le caractère iconique et le caractère graphique sont séparés par la contingence

Les caractères I et G, qui étaient liés dans la matrice a priori, s'avèrent indépendants par les réponses que donnent les élèves. Le rôle joué par les icônes du questionnaire (le petit bateau et la représentation des mobiles sur une droite à un moment donné) est différent du rôle joué par les graphiques cartésiens.

ii) Les connaissances mathématiques "extrapolation" et "division euclidienne" sont indépendantes

Ces connaissances était liées dans la matrice explicative a priori et ce sont les élèves qui les ont rendues indépendantes. La capacité d'extrapoler un graphique ne semble pas avoir un rapport avec la maîtrise numérique.

iii) Le caractère temporel des fonctions proposées est opposé à la classe L des élèves de la filière littéraire (18 ans).

Il n'y a pas un effet de l'apprentissage chez les élèves littéraires de 18 ans quant à l'interprétation des fonctions temporelles.

iv) La réussite à l'exercice est indépendante de l'appartenance aux différents niveaux scolaires (16 et 18 ans)

Il n'y a pas non plus un effet de l'apprentissage en général pour les contenus du questionnaire.

v) La note annuelle en mathématique (MAT) est liée à la réussite à la représentation cartésienne de la fonction S(x) et à la réussite à l'interprétation de la coïncidence de mobiles dans un diagramme e-t.

Les tâches demandées dans les questions 3.1. et 4.1. sont familières aux élèves. Les professeurs font jouer un rôle important dans leurs évaluations à l'interprétation de diagrammes espace-temps et à la représentation cartésienne des fonctions linéaires.

Références

Brousseau G. (1998), Théorie des situations didactiques, La Pensée Sauvage, 1998.

Couturier R., Gras R. (2005), CHIC: Traitement de données avec l'analyse implicative, Journées Extraction et gestion des connaissances (EGC) 2005, Vol. 2, pp 679-684.

Gras R. (2005), Panorama du développement de l'A.S.I. à travers des situations fondatrices, Troisième Rencontre Internationale Analyse Statistique Implicative (ASI), Quaderni di Ricerca In Didattica of G.R.I.M. Supplemento 2-15, 2005, pp 6-24.

Gras R. (1996), L'implication statistique, La Pensée Sauvage, 1996.

Gras R. (1992), L'analyse des données : une méthodologie de traitement de questions de didactique, Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol. 12(1), pp 59-72, 1992.

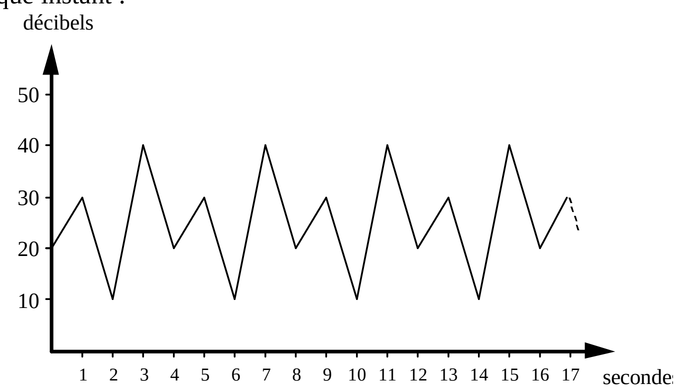
Summary

We propose to the pupils of the Secondary School a questionnaire, which the goal is to analyse the adidactic role of the graph. In this experimentation one will test the capacity of the pupils, in relation with the Cartesian graph of the functions, for: 1) to envisage results, 2) to represent and to communicate certain situations or certain properties, and 3) for to interpret information posed graphically. The data were explored beforehand by the means of the factorial analysis (ACP and AFC). The models derived from this preliminary analysis were confronted with a later implicative analysis.

Annexe 1: Questionnaire

Question 1

Un récepteur de radio a une panne insolite : l'intensité du son varie continuellement. Le contrôle de cette variation pendant 17 secondes a permis de déterminer la graphique ci-dessous, où l'intensité du son, mesurée en décibels, est donnée à chaque instant :



Êtes-vous capable de prévoir quelle serait la valeur de l'intensité du son pour

1.1. t = 18 s. 1.2. t = 23 s. 1.3. t = 315 s.?

Question 2

Un essai de 3 systèmes de régulation automatique de la température de l'eau d'une douche est réalisé dans une usine. L'eau commence à sortir à 10 degrés de température dans les trois douches et on prétend atteindre une température stabilisée de 40 degrés. Les équipes qui essaient les trois systèmes, A, B et C, donnent les rapports suivants :

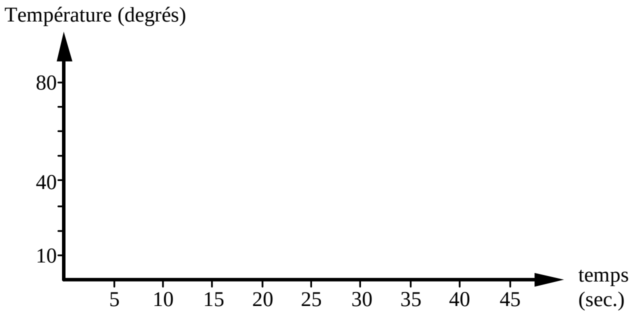
A : Le système fonctionne bien. Au bout de 10 secondes l'eau atteint la température adéquate (40 degrés) sans oscillations et après la température demeure constante.

B : L'eau sort à 10 degrés pendant les 10 premières secondes ; elle monte très vite jusqu'à atteindre 80 degrés exactement pour t = 15 sec. Entre 15 et 20 secondes, la température descend progressivement jusqu'à atteindre 40 degrés, constants à partir de t = 20 sec.

C : Pas question de prendre une douche avec ce système. Pendant les 5 premières secondes la température monte sans hauts ni bas jusqu'à 40 degrés. A partir de t = 5, la température descend jusqu'à 20 degrés qui sont atteints pour t = 10 sec. Après, la température monte jusqu'à 40 degrés dans les 5 sec. suivants, elle descend de la même manière pendant 5 sec. jusqu'à 20 degrés, elle remonte jusqu'à 40 degrés les 5 secondes suivantes… et continue ainsi tout le temps.

(Pour répondre aux questions suivantes vous pouvez vous aider des moyens que vous jugerez pertinents [interprétation directe du texte, tableaux de valeurs, graphiques…], mais vous devez raisonner les réponses).

2.1 Exprimez sur ce système d'axes coordonnés le fonctionnement des trois douches :



Si les trois douches démarrent en même temps :

2.2. A quels moments l'eau des trois douches atteindra la même température ?

2.3. Se peut-il que les températures de l'eau dans B et C soient les mêmes, mais différentes de celles du système A ? Si c'est possible, pour quelles valeurs du temps t ?

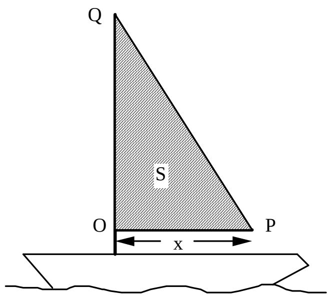
2.4. Se peut-il que les températures de l'eau dans A et C soient les mêmes, mais différentes de celle du système B ? Si c'est possible, pour quelles valeurs du temps t ?

2.5. Existe-t'il un période de temps pour lequel la température de C est supérieure à celle de A et à celle de B : $T_C > T_A$ et $T_C > T_B$? pour quelles valeurs du temps t ?

2.6. Existe-t'il un période de temps pour lequel la température de A est supérieure à celle de B et à celle de C : $T_A > T_B$ et $T_A > T_C$? pour quelles valeurs du temps t ?

Question 3

On veut construire la voile d'un petit bateau, dont la longueur du mât est OQ = 4 m. L'aire de la voile, qui est l'aire S du triangle POQ, varie selon la distance OP = x de la base du mât au bout P de la bôme (du mât horizontal).



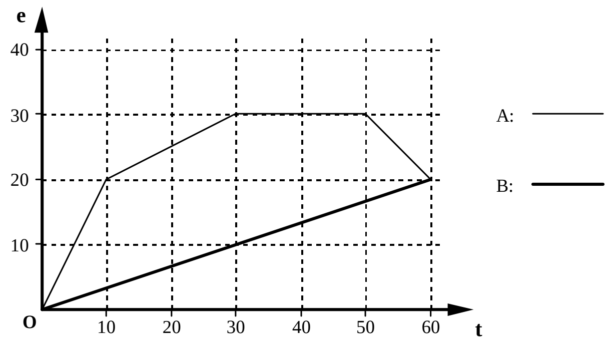
3.1. Faites un graphique qui représente la variation de l'aire S de la voile selon x. Représentez sur les axes cartésiens la longueur de la bôme (en mètres) sur l'axe OX et l'aire de la voile S (en mètres carrés) sur l'axe OY.

3.2. Trouvez une expression mathématique S(x), qui donne d'une manière générale la variation citée.

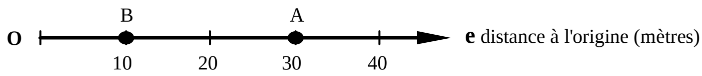
3.3. Exprimez dans un tableau les résultats obtenus pour l'aire S, selon la longueur x de la bôme (pour des valeurs de x entre 20 et 35 dm., c'est-à-dire, entre 2 et 3,5 m.)

Question 4

Deux mobiles A et B partent en même temps d'un point O et parcourent une ligne droite. Dans le graphique ci-dessous nous avons représenté les distances des mobiles à l'origine O.



Par exemple, suivant les indications du graphique, pour t = 30 sec., la position des deux mobiles A et B est donnée par : e_A = 30 m. et e_B = 10 m. Autrement dit, le mobile A se trouve à 10 mètres de l'origine et le mobile B à 30 mètres :



4.1. Est-ce que les deux mobiles coïncident le long du parcours ? Le cas échéant, pour quelle(s) valeur(s) de t ?

4.2. Décrivez le mouvement de A et B : dîtes si les vitesses changent ou non, s'ils s'arrêtent, s'ils reculent vers l'origine, etc.

4.3. Lequel des deux mobiles atteint la plus grande vitesse dans le parcours ?, Pour quelles valeurs de t ?

4.4. Lequel des deux mobiles arrive le premier au point situé à 20 mètres de l'origine ? Pourquoi ?

Vous devez raisonner toutes les réponses. A ce propos vous pouvez utiliser les graphiques fournis, d'autres graphiques faits par vous-même, des tableaux de valeurs, des calculs, etc.

Question 5

Quelles sont, à votre avis, les questions les plus faciles ? Pourquoi ?